



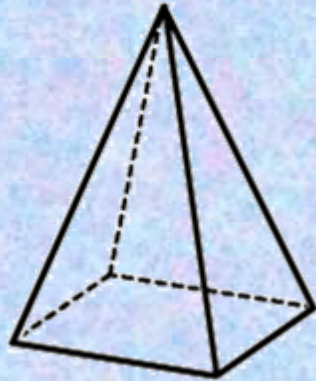
OriNidaZoom

Incontri online sulla didattica con l'origami

Area di base per altezza diviso 3

di Francesco Decio e Stefania Serre

Volume di una piramide



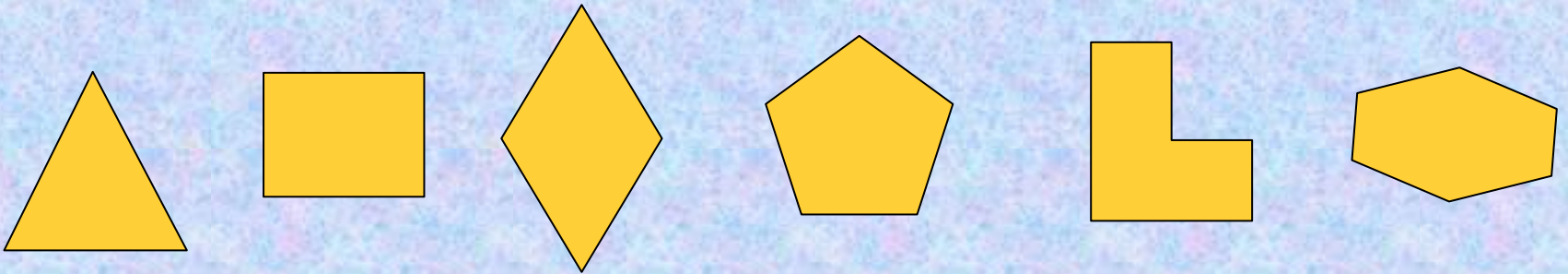
$$\frac{A_{base} \cdot altezza}{3}$$

Perché la formula per calcolare il **volume** di una piramide è così poco intuitiva?

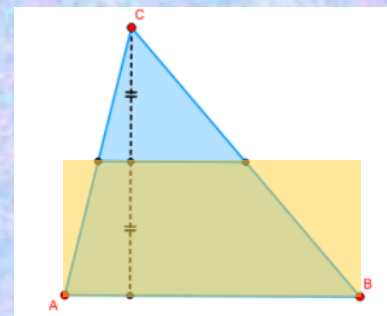
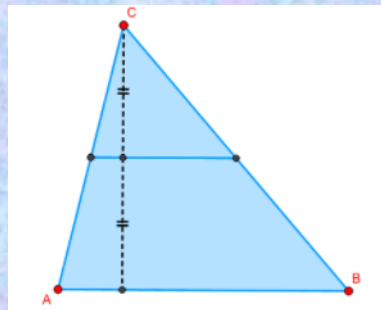
E' così facile ricordare la formula per calcolare **l'area** di un triangolo... perché con la piramide non accade altrettanto?

Area dei poligoni

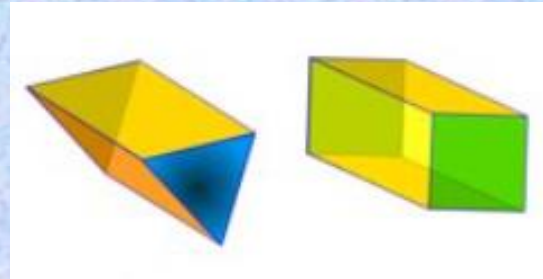
Teorema di Wallace – Bolyai - Gerwein



Due poligoni hanno la stessa area **se e solo se** sono equiscomponibili

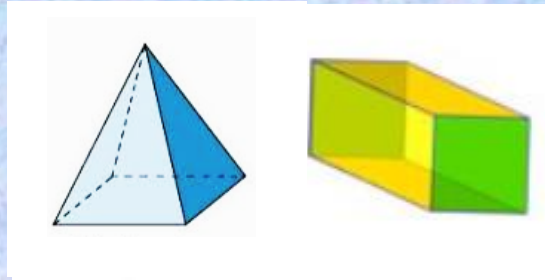


Volume dei poliedri



Due **prismi retti** hanno lo stesso volume se e solo se sono equiscomponibili

Volume dei poliedri



E più in generale? E' **vero oppure no** che ogni poliedro è equiscomponibile a un parallelepipedo retto?
Come si ottiene il volume di una piramide?

Euclide

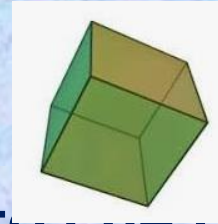
Gauss

Hilbert

Dehn

Volume dei poliedri

Teorema di Dehn



In generale non è affatto detto che poliedri che hanno lo stesso volume siano equiscomponibili!

In particolare il tetraedro regolare e il cubo (di ugual volume) non lo sono.

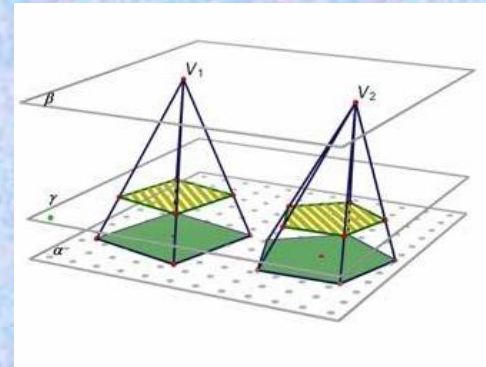
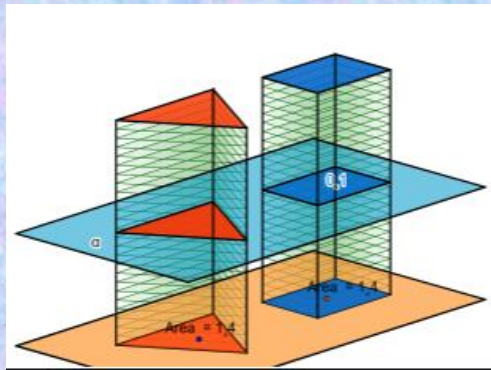
Ampiezza degli angoli diedri: sono incommensurabili!

E tutto questo ha conseguenze per le tassellazioni dello spazio

Volume dei poliedri

Come ricavare dunque il volume di un poliedro?

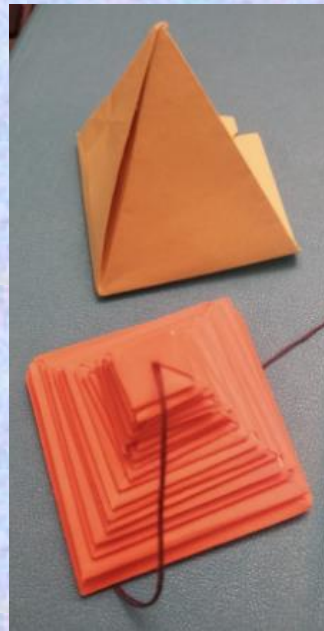
1) Principio di Cavalieri



Volume dei poliedri

Come ricavare dunque il volume di un poliedro?

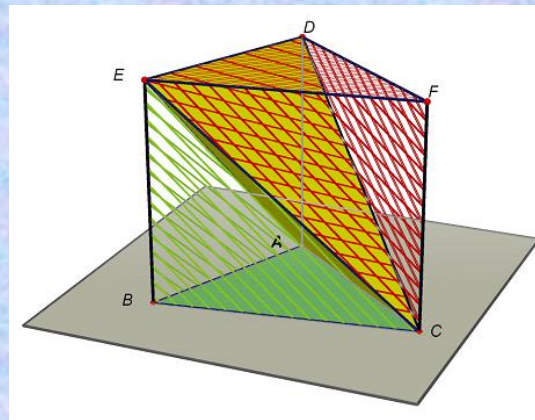
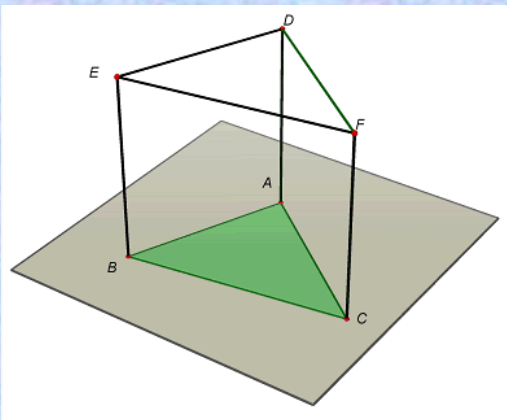
1) Principio di Cavalieri



Volume delle piramidi

Come ricavare il volume del tetraedro
e più in generale di una piramide?

- 1) Principio di Cavalieri
- 2) Scomposizione di un prisma a base triangolare
in **tre piramidi** di ugual volume (per Cavalieri)

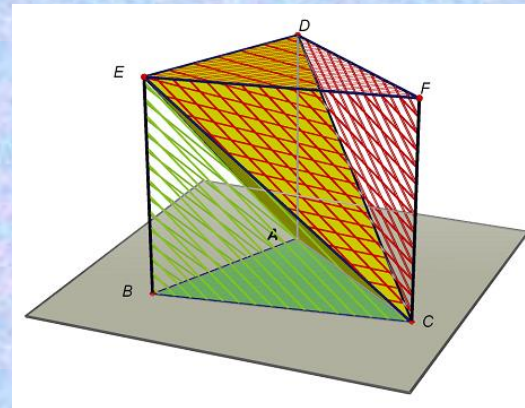
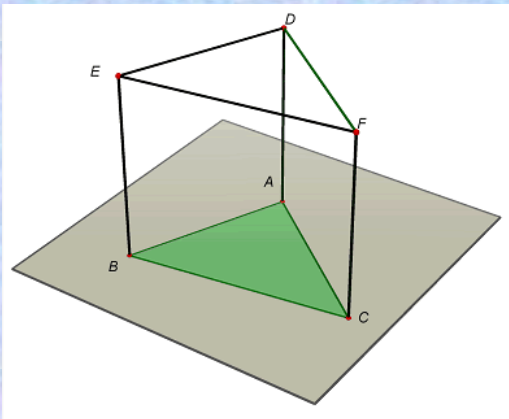


$$\text{Volume Piramide} = \frac{A_{\text{base}} \cdot \text{altezza}}{3}$$

Volume delle piramidi

Problema: le tre piramidi sono diverse tra loro, così anche se soddisfano il principio di Cavalieri non sono del tutto 'convincenti'

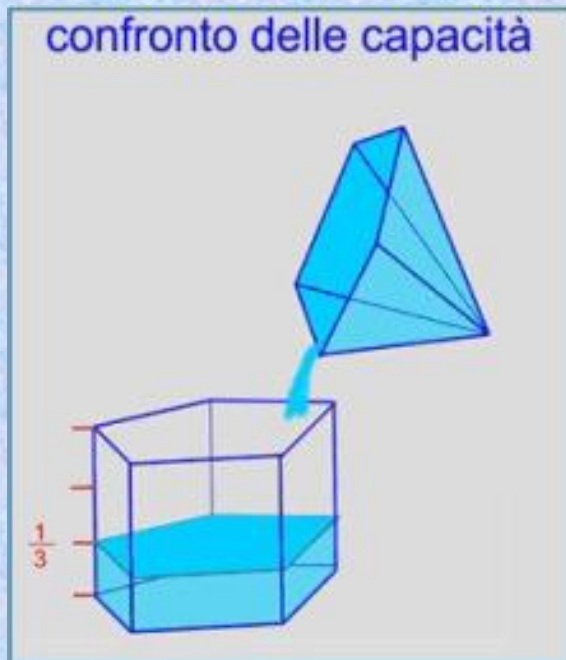
$$\text{Volume Piramide} = \frac{A_{base} \cdot \text{altezza}}{3}$$



Volume delle piramidi

$$\text{Volume Piramide} = \frac{A_{base} \cdot \text{altezza}}{3}$$

Sono senz'altro d'aiuto tutte le prove sperimentali!



Volume delle piramidi

Ma di certo un ruolo speciale
lo merita la dissezione del cubo in tre piramidi congruenti:
è un caso molto particolare,
ma anche molto concreto e convincente



$B \times H / 3$

Quadrato da A4

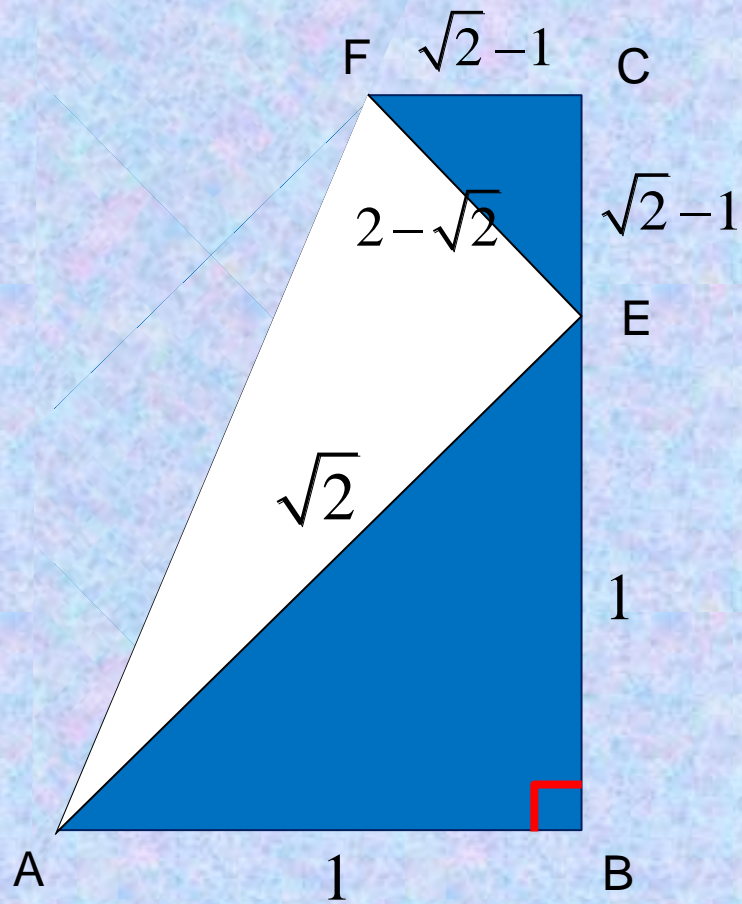
Questa tecnica permette di ottenere un quadrato (per il coperchio della scatola 'magica') con due pinch e un riferimento preciso

$\sqrt{2}$

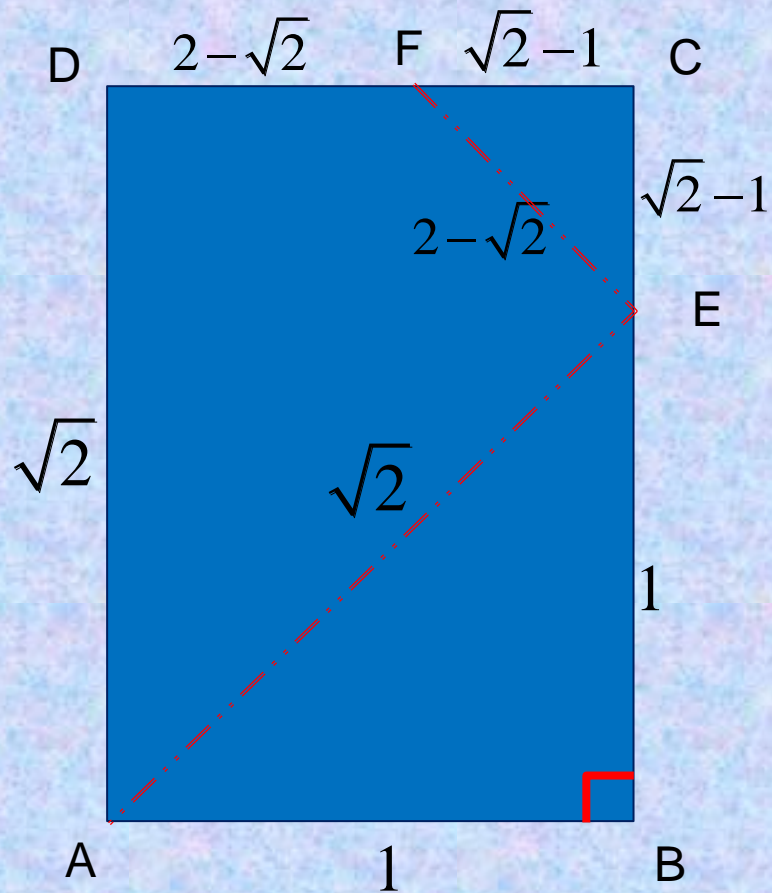


1

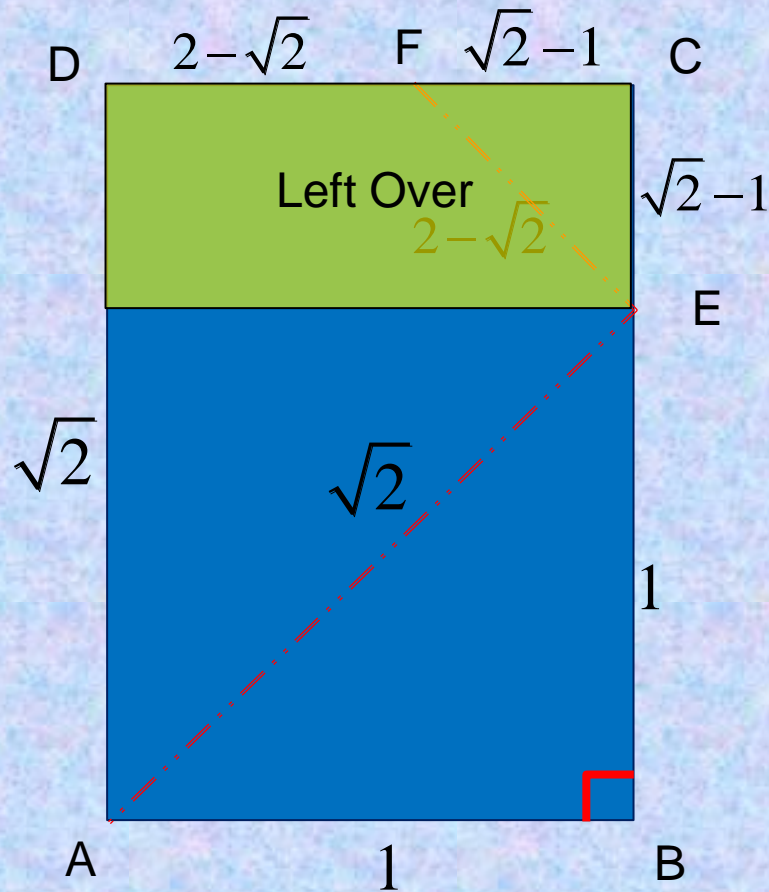
Quadrato da A4



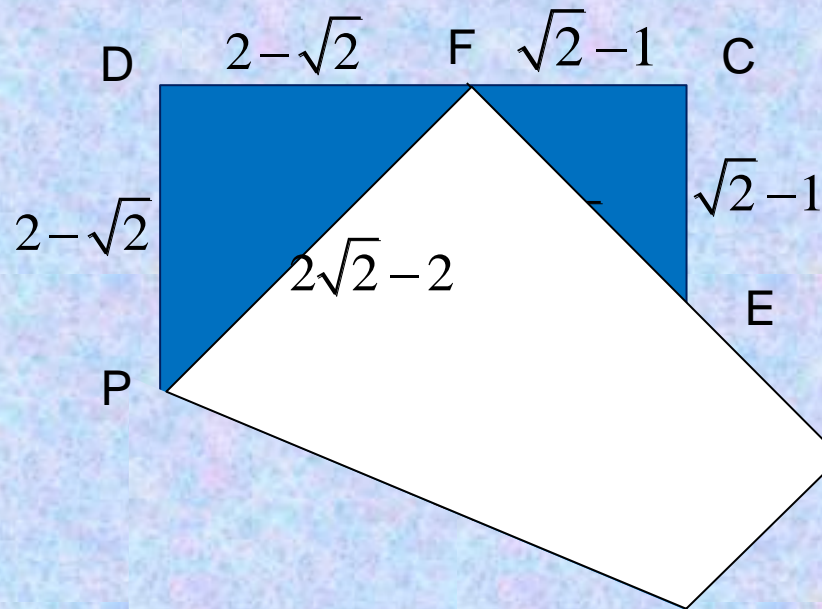
Quadrato da A4



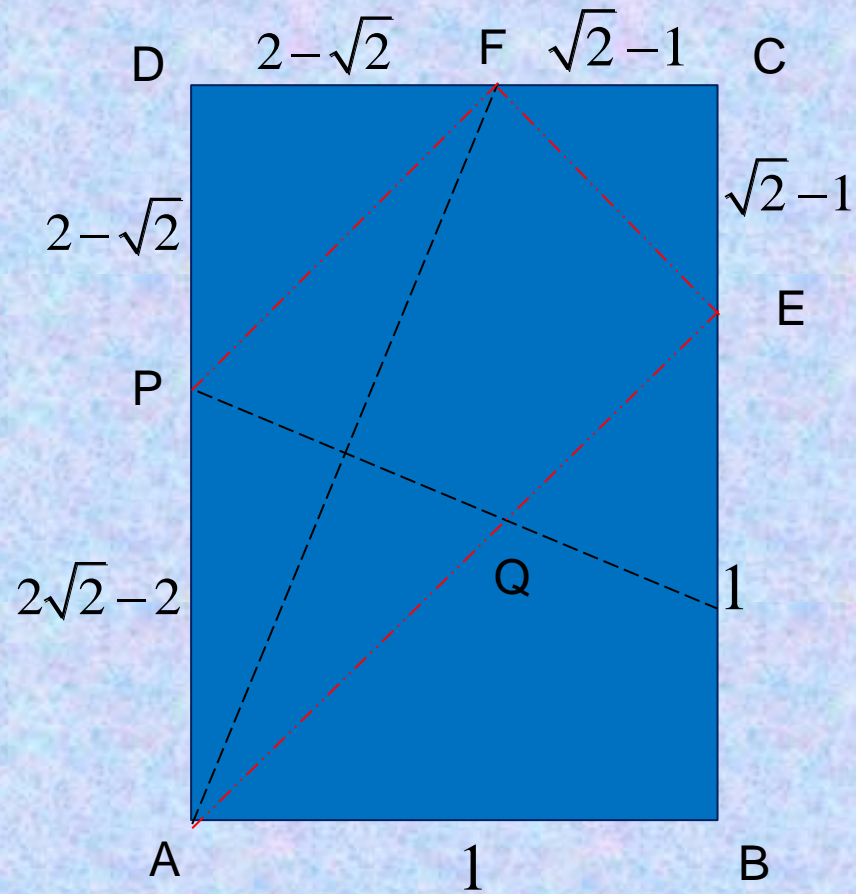
Quadrato da A4



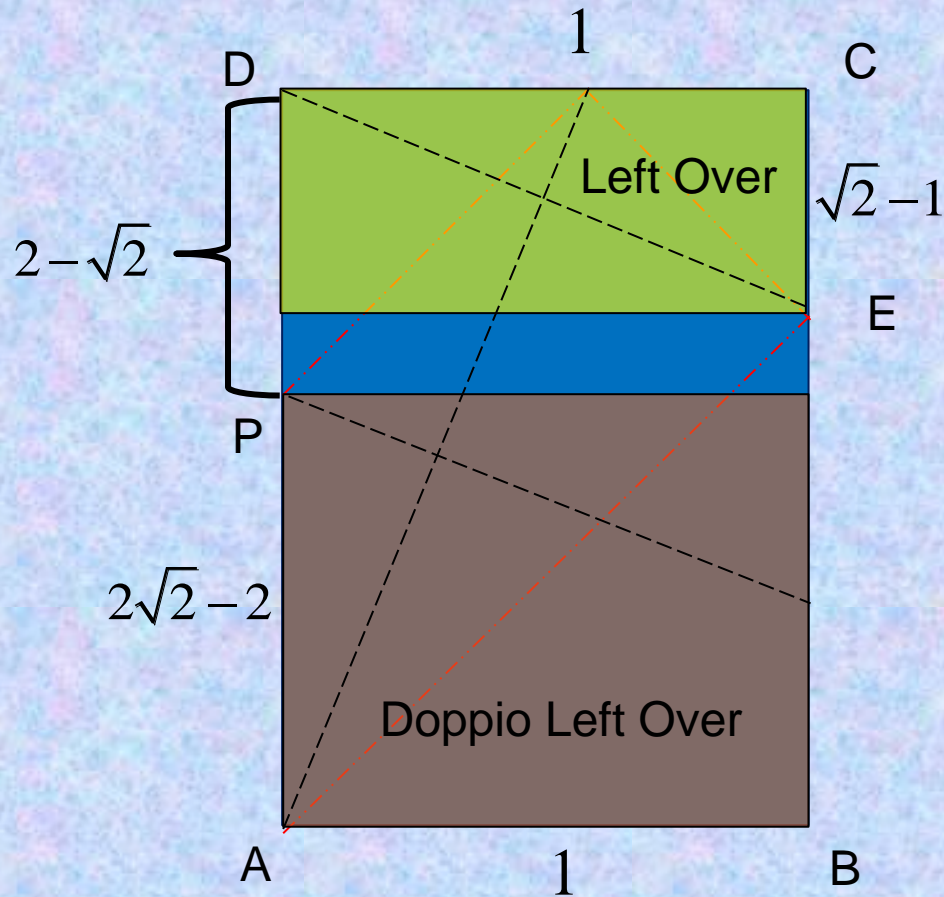
Quadrato da A4



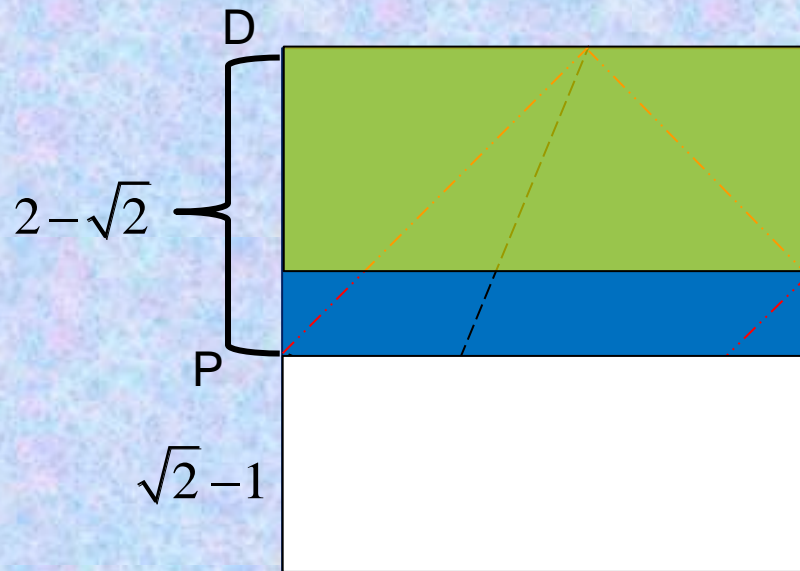
Quadrato da A4



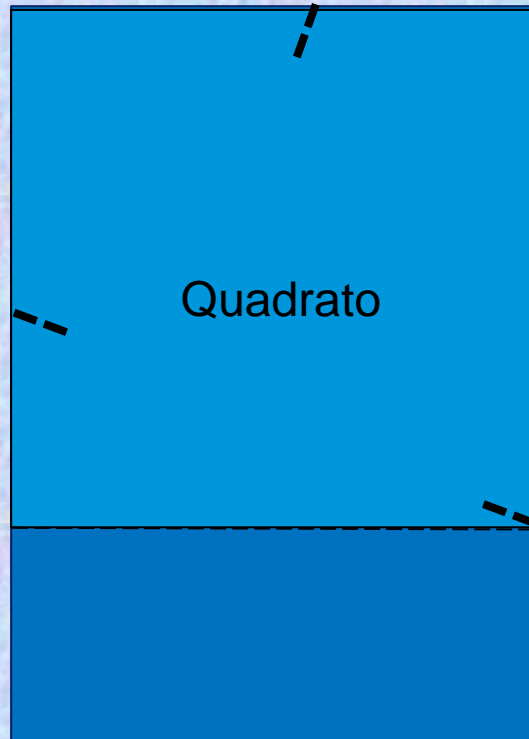
Quadrato da A4



Quadrato da A4



Quadrato da A4



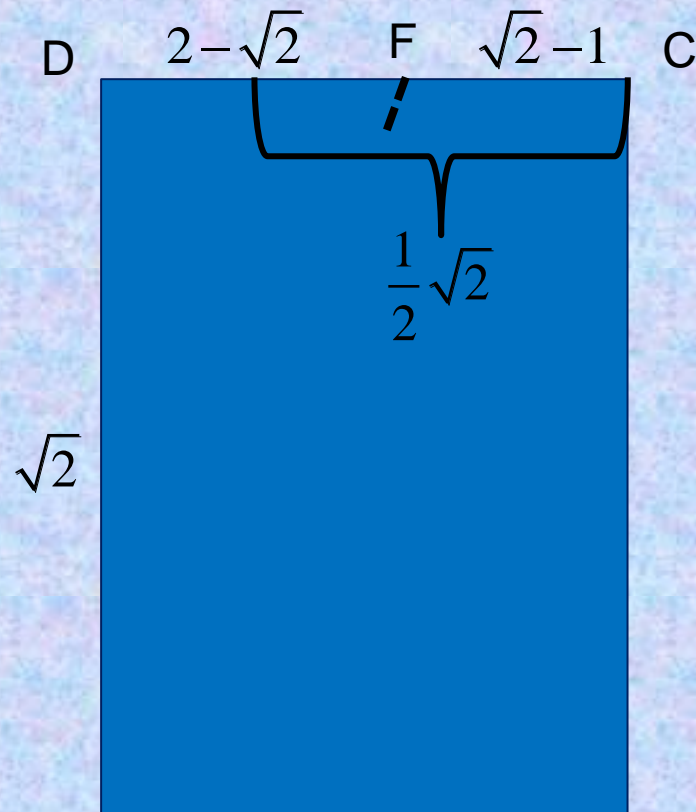
Quadrato da A4



Quadrato da A4

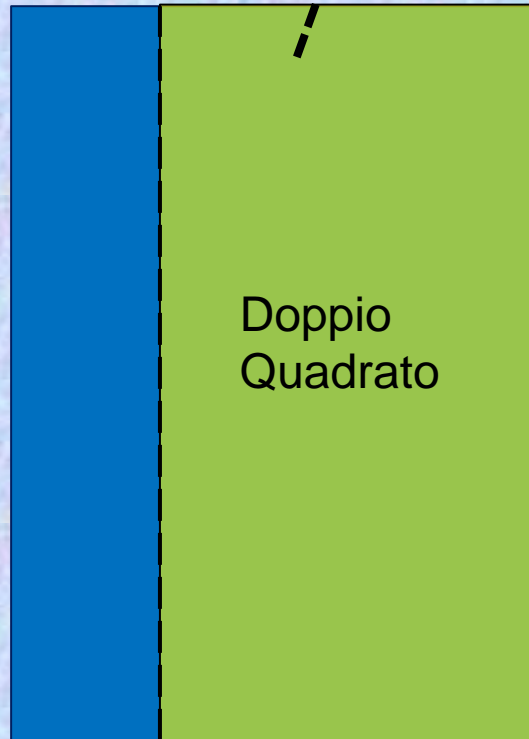


Quadrato da A4

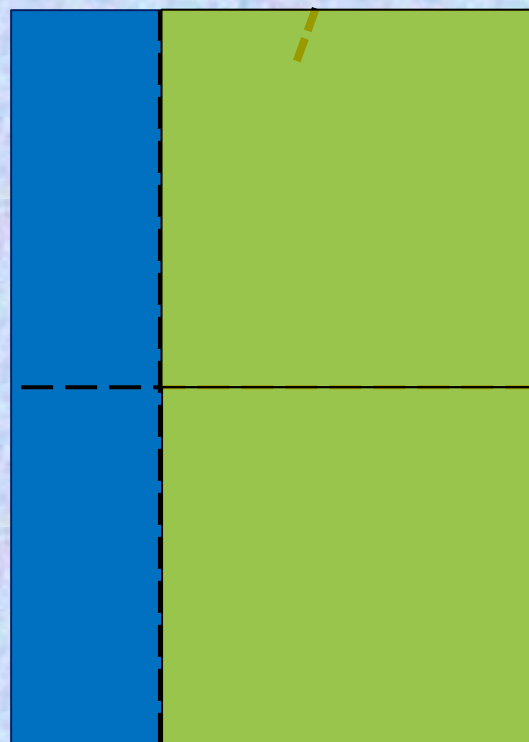


$$\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Quadrato da A4



Quadrati da A4



In geometria analitica

$$A \equiv O(0;0)$$

$$B(1;0)$$

$$C(1;\sqrt{2})$$

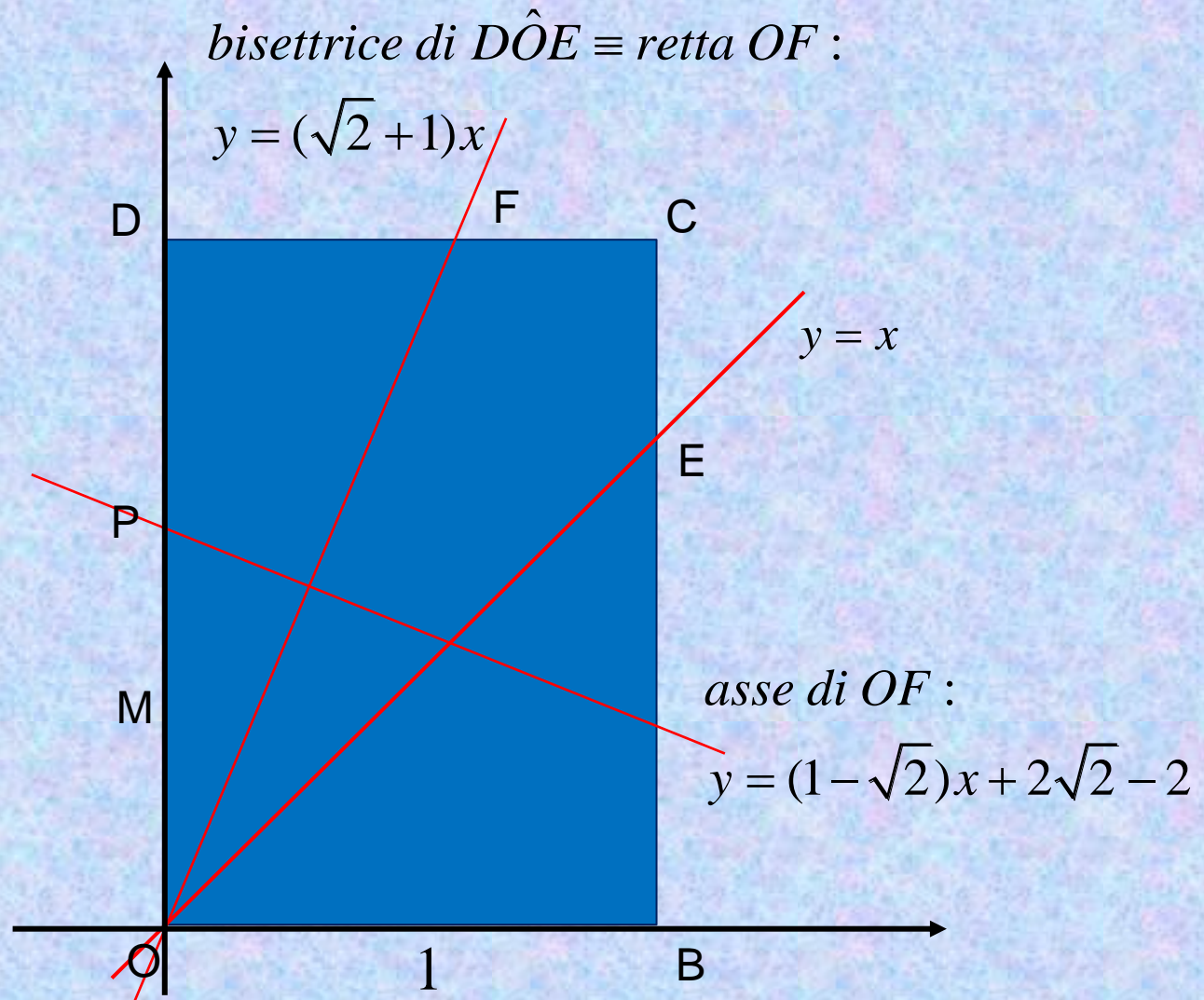
$$D(0;\sqrt{2})$$

$$E(1;1)$$

$$F(2-\sqrt{2};\sqrt{2})$$

$$P(0;2\sqrt{2}-2)$$

$$M(0;\sqrt{2}-1)$$



Bibliografia e Sitografia

- Monti, Arianna, Sul terzo problema di Hilbert. Università di Bologna, Corso di Studio in Matematica (disponibile online)
- <http://utenti.quipo.it/base5/geosolid/cubo3piramidi.htm>
- https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomento/CABRI/Cabri_Giu06/VolumePiramide.htm

Grazie per aver piegato e ragionato insieme a noi!

Francesco e Stefania

origamiedidattica@origami-cdo.it