DELLA PIEGATURA DELLA CARTA APPLICATA ALLA GEOMETRIA

Questo articolo, pubblicato dal Prof. Giovanni VACCA dell'Università di Roma sulla rivista PERIODICO DI MATEMATICHE – Storia, didattica, filosofia – Organo della società Italiana "Mathesis" (Serie IV, vol. X, n.1, Gennaio 1930 – Zanichelli, Bologna), è quasi sicuramente il primo studio italiano sull'argomento. L'articolo è corredato da note e da numerosi allegati, a seguito di ricerche bibliografiche svolte da me nelle Biblioteche di Firenze, e da Brian Bishop (Inghilterra) nella British Library.

L'ultimo allegato contiene il necrologio del Prof. Vacca, scritto da Luciano Petech nell'Annuario dell'Università di Roma, 1954-55.

Roberto Morassi

PERIODICO DI MATEMATICHE
ANNO X (1930)
Zanichelli, Bologna

Varietà e Questioni proposte

Della piegatura della carta applicata alla geometria.

1. La carta piegata in Cina. — *Il fiume corre intorno alla casa. Nel colmo dell' estate ogni cosa riposa, solo qualche rondine vola sotto le grondaie e lontano sul fiume scherzano i gabbiani. La vecchia moglie, rigando la carta, disegna una scacchiera, il mio piccolino piega un filo di ferro per farne un amo. Stanco e malato, oltre i rimedi, che altro può desiderare questo mio corpo indebolito?*

Questa poesia del poeta TU FU, vissuto dal 712 al 770 d. C. [1], mentre descrive gli ozii estivi del poeta, dimostra che già fin da allora il gioco degli scacchi era popolare in Cina. Ma essa ci interessa perchè descrive come i Cinesi giocano a scacchi. Gli scacchi non sono in rilievo come i nostri, ma sono incisi su pedine rotonde di pietra dura o di legno. La scacchiera non esiste come uno oggetto solido, su tavola, come da noi; i giocatori ne preparano una nuova ogni volta che giocano, con un foglio di carta sottile. Si taglia un quadrato di carta e le caselle si ottengono con successive piegature in due. Le linee che limitano le caselle sono tracciate tenendo la carta piegata in due e facendo scorrere sulla piega, leggermente, il pennello intinto d'inchiostro. Si hanno così linee rette, sottilissime, tracciate con maggior sicurezza che non con la riga. Così si faceva ai tempi di TU FU in Cina, più di mille anni fa, e così fanno ancor oggi in Cina i giocatori di scacchi.

È questo il più antico accenno che io abbia trovato di applicazioni geometriche della carta piegata.

NOTA 1

---

(1) Si veda: TU FU: *The Autobiography of a Chinese poet*, transl. by Florence Ayscough. Londra, 1929.

I Cinesi, i quali hanno avuto la carta fin dal 105 d. C. e fanno ed hanno fatto carta di ogni specie di fibre vegetali e animali, hanno avuto, per molti secoli, l'uso di una carta molto omogenea, assai pieghevole, e quindi suscettibile di essere piegata in ogni senso. Sebbene non sia riuscito a trovarne notizie nelle enciclopedie cinesi a mia disposizione, mi sembra fuori di dubbio che siano i Cinesi i primi inventori di quelle numerose scatole, uccellini, barchette, ranocchie, ventagli ed altri piccoli giochi che ora sono familiari anche ai bambini europei.

2. Piegatura della carta in Europa. — In Europa questi giochi dovrebbero essere di importazione recente. Gli antichi non potevano averli perchè il papiro era anzitutto costoso, rigido e fragile, non si prestava affatto a piegature senza fratture irregolari. Inoltre le due serie di fibre incrociate che lo costituiscono rendevano difficili le piegature diagonali. La pergamena, ancor più costosa del papiro, raramente offre superfici piane, e di più si piega anch'essa male, ovvero conserva male le pieghe. In nessuno scrittore antico nè in nessun geometra greco o latino vi è alcun accenno alle proprietà geometriche delle pieghe.

Il verbo latino *plico*, da cui proviene l'italiano *piega*, ha insieme il senso di *piegare*, *avvolgere*, *attorcigliare* (Virgilio, Lucrezio). Il corrispondente verbo greco πλέκω ha parimenti il senso ampio di *intrecciare*, *allacciare*, *disporre*. *Flecto*, *flexus*, *flexura* hanno pure un senso più ampio e più indeterminato di quello dell'italiano *piega*, *piegare*, *piegatura*; indicano piuttosto una curvatura qualsiasi che non una piega completamente eseguita.

Sinus, detto della veste, è tanto una piega quanto una cavità qualunque. Le parole moderne inglesi *fold*, *plait* (e le corrispondenti tedesche *falten*, *die Falte*) risalgono al latino *plico* ed hanno la stessa indeterminatezza. Il senso moderno esatto di *piega*, *plie* francese, *fold* inglese, appare quindi assai recente.

Anche in arabo vi sono molte parole che corrispondono a *piegare*. Gli scrittori classici notano la difficoltà che si incontra nel piegare la carta spessa (Lane: *Lexicon*, s. v. *tawà*); è indicata però con precisione, non l'idea astratta di piegare, ma l'idea più complessa di *piegare* o *spiegare* una lettera. Però, come nei latini, sono confuse insieme le idee di piegare e di arrotolare, come nel Corano, XXI, 104: « *In quel giorno noi arrotoleremo il cielo come viene arrotolato* (*natwî*) *il volume delle scritture* ». (Trad. BONELLI).

I Cinesi invece hanno una parola esatta per indicare l'azione del piegare la carta (*chê*, N. 559 del dizionario del Giles; giapponese *shô*), che si adopera altresì per indicare la ripiegatura del ventaglio. Questa parola cinese, come appare dai dizionari, è

NOTA 2

sconosciuta dagli antichi autori classici ed è dovuta agli scrittori medievali.

Le statue egiziane e le statue arcaiche greche offrono, è vero, vesti pieghettate con molta regolarità, le quali potrebbero suggerire al geometra idee di linee rette. Ma le stoffe suscettibili di essere pieghettate sono anch'esse oggetti costosi; le pieghe così ottenute si gualciscono subito e non possono in alcun modo dare quelle sensazioni tattili che dà soltanto la carta piegata, per acuire e sviluppare il senso geometrico. Queste pieghettature egiziane e greche dovrebbero piuttosto far parte di un'altra ricerca, lo studio della geometria dei sarti, *geometria sartorum*, di cui LEIBNIZ sembra per il primo aver avuto l'idea, e la quale, mentre ha un certo sviluppo nelle scuole professionali, non sembra finora aver preso contatto con la geometria pura.

3. Shelley, Froebel, Lardner. — Il grande poeta inglese P. B. SHELLEY (1792-1822) per divertire i suoi piccoli amici ed anche per proprio divertimento, lanciava, poco più che ventenne, barchette di carta nel laghetto di Hyde Park, il grande giardino di Londra. Un suo diligente biografo, T. J. HOGG (*Life of Shelley*, vol. I, p. 83, London, 1858) nel riferire questo episodio, a cui attribuisce la data dell'autunno 1814, avverte però che il poeta non aveva ancora imparato la costruzione delle barchette di carta piegata. Sembra che egli soltanto foggiasse dei pezzi di carta in forma di barche torcendoli, forse ai due capi (*he twisted a morsel of paper into a form that a lively fancy may consider a likeness of a boat*).

Sembra quindi che il poeta avesse osservato soltanto, non la piegatura della carta, ma la sua attitudine ad essere *torta*, o *attorcigliata*. Anche questa proprietà meriterebbe l'osservazione di uno studioso di geometria. Anche le più interessanti osservazioni e applicazioni dell'attorcigliamento della carta sembrano esser state fatte dai Giapponesi, fin dal sec. XVIII, colla fabbricazione regolare di carta *increspata*, dopo esser stata dipinta o stampata. La carta acquista allora nuove proprietà elastiche ed i disegni appaiono in scala minore, ma simili a quelli della stampa originale.

Il nome francese *cocotes* degli uccellini di carta, la più popolare di queste figure in tutta Europa, sembra moderno; non ne conosco alcun uso anteriore alla prima metà del sec. XIX. BALZAC dice « *l'enfant égare vos papiers; il employe à ses cocotes le journal que vous n'avez pas encore lu* ».

Nei giochi froebeliani, nella prima édizione pubblicata da FROEBEL nel 1836, non compare ancora la piegatura della carta.

La lezione della piegatura della carta, appare soltanto verso il 1840; si veda ad esempio F. J. JACOBS: *Manuale pratico dei giardini d'infanzia di Federico Froebel*, traduzione italiana, Milano, 1871. NOTA 3 ALL."A"

Il primo libro di geometria in cui la piegatura della carta sia adoperata per rendere più istruttive le costruzioni e i ragionamenti di geometria piana, sembra essere un trattato di geometria di DIONYSIUS LARDNER, il quale nel 1840 scriveva: *if the triangle be conceived to be folded over*, ecc... *both coincide with the fold of the paper*, ecc.

Sono questi gli esempi più antichi dell'uso della parola *fold* per piegare la carta, dati dal nuovo grande dizionario inglese di Oxford. DIONYSIUS LARDNER, nato nel 1793, morto nel 1879, autore di una *Cabinet Encyclopedia*, 1829, ebbe una vita molto avventurosa. Passò molti anni in America e poi si stabilì in Francia. ALL. "B"

È possibile che la sua attenzione sulla proprietà della carta piegata sia stata destata dall'osservazione dei primi emigranti cinesi che allora giungevano negli Stati Uniti? I *kindergarten* froebeliani hanno forse appreso i loro giochi dalla geometria del LARDNER? Sono due domande a cui non so finora dare risposta.

4. Trattati di geometria della carta piegata. — Il prof. P. PASQUALI stampò nel 1889 forse il primo trattato di geometria elementare in cui la piegatura della carta costituisca lo strumento fondamentale. Io conosco soltanto la seconda edizione, intitolata: *Geometria intuitiva senza strumenti, ad uso delle scuole elementari superiori, tecniche normali e industriali. Lezioni di ritaglio geometrico* (premiata all'Esposizione di Brescia del 1889), Lendinara, 1892. ALL. "C"

È un opuscolo di 55 pagine con molte figure. Il libretto è evidentemente ispirato da qualche manuale di giochi froebeliani. Il testo è diviso in esercizi ed esecuzioni, i ragionamenti sono appena accenati.

L'indiano T. SUNDARA ROW, a Madras, in India, ebbe l'idea, dal dono ottavo dei *Kindergarten* froebeliani, di studiare una esposizione geometrica delle proprietà della carta piegata e la pubblicò nel 1893. Nel 1901 a Chicago, fu pubblicata e riveduta da W. W. BEMAN e da D. E. SMITH, col titolo: *Geometric Exercises in Paper Folding*, pp. XIV, 148. È questo il più lungo trattato forse finora esistente della geometria della carta piegata. L'autore però presuppone la conoscenza e l'uso della geometria ordinaria euclidea. Le costruzioni con la carta piegata sono più spesso traduzioni od esecuzioni delle corrispondenti costruzioni di EUCLIDE. L'autore dà però alcune interessanti costruzioni geometriche, probabilmente originali, di una grande semplicità. ALL. "D"

Il libro di SUNDARA ROW non rimase sconosciuto in Europa. F. KLEIN ne fa cenno nelle sue: *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare* (vers. ital., Torino, 1896, pag. 35). Il KLEIN accenna inoltre ad uno studio di HERMANN WIENER, per ottenere lo sviluppo dei poliedri regolari per mezzo del piegamento della carta, pubblicato pure nel 1893, nel *Supplemento al Catalogo*, pubblicato dal DYCK, *dell'Esposizione matematica tenuta a Monaco*, pag. 52. NOTA 4

Recentemente i matematici inglesi G. C. YOUNG e W. H. YOUNG pubblicarono un libro di geometria per i piccoli: *The first book of Geometry*), tradotto dalla prof. L. VIRIGLIO, Torino, 1911. In questo interessante volume si fa largo uso della piegatura della carta per rendere più semplici ed intuitive le dimostrazioni geometriche.

5. Superficie di Peano-Schwartz e le lanterne veneziane. — Nel 1890, contemporaneamente, il prof. H. SCHWARTZ, *Math. Abh.* II, p. 309, 369, e il prof. G. PEANO, *Atti della R. Acc. dei Lincei* VI, p. 54, applicarono l'interessante metodo di piegatura della carta, piegata a rombi, tagliati da diagonali, in modo da rendere il foglio di carta pieghevole e ripiegabile su se stesso (metodo adoperato da molto tempo dai costruttori cinesi e giapponesi di lanterne, dalle quali forse derivano, sebbene non sia riuscito ad averne notizia, le cosiddette *lanterne veneziane*) ad una più esatta definizione dell'area di una superficie qualunque. Questo singolare modo di piegare la carta in modo da costruire lanterne cilindriche od anche di altra forma più complicata, permette difatti di inscrivere in una superficie una rete di triangoli, in modo tale che si può far tendere a zero, non solo l'area di ciascun triangolo, ma anche tutti i lati di ognuno dei triangoli senza che in pari tempo l'area della superficie poligonale così fatta tenda all'area della superficie circoscritta. ALL. "E"

Si possono invece disporre le cose in modo che l'area della superficie dei triangoli tenda ed un limite qualsivoglia, ovvero all'infinito.

Lo studio di questa superficie si collega inoltre con quello della flessibilità delle superfici poliedriche convesse e non chiuse. CAUCHY ha dimostrato nel 1811 che i poliedri chiusi convessi sono rigidi. Se i poliedri non sono chiusi, la rigidità non sussiste più. Per esempio in un icosaedro regolare è sufficiente fare un taglio lungo due spigoli consecutivi, non appartenenti ad un stesso triangolo, perchè l'icosaedro sia suscettibile di deformazioni, che non credo ancora studiate. Il miglior modo di studiarle è quello di esaminare un modello di carta.

6. Poligoni regolari come nodi di una cravatta ideale. — Una interessante costruzione di un pentagono regolare si ottiene, facendo un nodo di cravatta, cioè un nodo semplice con un nastro di carta, cioè una striscia a bordi paralleli. Stringendo il nodo, si forma un pentagono regolare. Questa costruzione e la relativa dimostrazione è stata data come nuova da E. LUCAS nelle: *Récréations Mathématiques*, vol. II, Paris, 1883, p. 202, ed è riprodotta nel citato opuscolo di P. PASQUALI (p. 29). ALL. "F"

Ma FERDINANDO JACOLI, nel *Boll.* di BONCOMPAGNI, XVI, 1883, p. 445, ha ripubblicato il seguente passo di uno scolaro di BONAVENTURA CAVALIERI, il gesuato URBANO D'AVISO (n. a Roma nel 1618, m. dopo il 1690), estratto dal suo *Trattato della sfera*, etc. Roma, 1682, p. 255: ALL. "G" ALL. "H"

« Ti voglio dare il modo di descrivere e formare mechanicamente un pentagono, che è una delle più difficili figure da disegnare, e pure è la più facile, che si facci in natura, perchè non è altro che un semplice nodo.

« Prenderai pertanto una striscia di carta, della larghezza che tu vorrai, e che habbi li lati paralleli, e con quella procura di fare un nodo, come se fosse una corda, avvertendo però che la carta resti sempre tesa nelle piegature, che stringendola tanto che resti ben tirata, se taglierai con le forbici li capi che avanzano, haverai fatto un pentagono giustissimo.

« Farai anco la figura esagona, se prenderai due striscie di carta di eguale larghezza, e con li lati paralleli, e procurerai di fare con esse un nodo, facendo che le punte dell'incurvatura che haverai fatta di una striscia, passino per l'aperto dell'incurvatura dell'altra, che stringendole adattatamente, e che mantenghino sempre la loro larghezza, tagliando l'avanzi delle punte, haverai fatto un esagono perfettissimo ».

Il nodo descritto dal D'AVISO per la descrizione dell'esagono, è quello che i marinai chiamano *nodo piano*, (*nœud plat*, franc., *reef knot*, ingl.) e che serve a congiungere nel modo più semplice due cavi.

La prolissa descrizione del D'AVISO è probabilmente il più antico passo in cui si tratti di carta annodata, piuttosto che piegata. La elegantissima teoria delle diverse specie di nodi dei marinai, merita forse una maggior attenzione dei geometri.

Sul D'AVISO si vedano le note critiche di P. RICCARDI, *Bibl. Matematica*, Modena, 1893, Aggiunte, VI, col. 190. ALL. "I"

Infine, se invece di fare un nodo semplice, si fa un nodo doppio, si ottiene un eptagono regolare, come si dimostra facilmente considerando i trapezii e lati paralleli inscritti nell'eptagono. Bisogna fare attenzione a fare il nodo ordinatamente, in modo da evitare che il nodo stesso si sciolga quando si stringe.

È probabile che si possano, teoricamente, costruire in tal modo i poligoni regolari di un numero dispari di lati. È difficile però verificare sperimentalmente la cosa con una striscia di carta piegata, e non mi sembra certo che debbano necessariamente, senza porre forse altre condizioni relative al modo dell'intreccio, ottenersi in tal modo soltanto dei poligoni regolari.

7. Desiderata di Leibniz. — In un appunto manoscritto di Leibniz si trova il seguente elenco:

Geometriae est explicare figuras, quas natura et ars singulari quadam ratione producit, ita figurae cristallisationum, ecc..

Geometria sartorum.

De artificio, puerorum, quo fila digitis implicata educunt.

De textoria arte.

De geometria apum et aranearum.

8. Cenno di una geometria astratta della carta piegata. — Ogni lettore diligente può facilmente vedere che un foglio di carta piegato in due dà una facilissima costruzione di una linea retta, la quale appare quindi come l'*astrazione* di una piega.

Il foglio di carta piegato in quattro permette di costruire subito un angolo retto con molta precisione, se la carta è compatta e sottile. Due pieghe perpendicolari ad una stessa piega, danno due parallele. Un angolo piegato in due, in modo che i lati coincidano, offre una piega che è la bisettrice dell'angolo. Con un poco di attenzione si può ancora piegare in tre un angolo tracciato sulla carta. Le due pieghe intermedie danno allora la trisezione di un angolo.

È interessante osservare che le figure costruite per mezzo della carta piegata, per esempio le bisettrici di un triangolo, le mediane dei lati o degli angoli, si ottengono rapidamente, e non sono soggette alle illusioni ottiche in cui si incorre tracciando a mano libera quelle linee, dando così luogo a paradossi geometrici (*dimostrazione che ogni triangolo è isoscele*, ecc.) descritti ad esempio nelle: *Ricreazioni matematiche* di W. W. Rouse Ball (versione italiana, Bologna, 1910, pag. 43).

Sembra desiderabile poter definire, e possibilmente idealizzare, le condizioni alle quali deve soddisfare un foglio di carta perchè le pieghe risultino perfette; ciò sembra necessario per poter stabilire un sistema di postulati per una geometria della carta piegata.

9. Altri desiderata. Conclusione. — Le più semplici costruzioni che fanno i bambini con la carta: il cappello, la barca, la scatola, sono descritti nei giochi froebeliani in modo prolisso e con l'aiuto di molte figure. Sarebbe desiderabile studiare una notazione algebrica per descrizioni concise, anche senza figure.

L'interesse di questa notazione sarebbe maggiore se si potesse applicare a costruzioni più complicate, che si tramandano piuttosto verbalmente, che non nelle prolisse descrizioni dei libri di giochi. Alcuni lettori sanno certamente costruire un cubo con un foglio di carta quadrato, un uccellino che muove le ali, una rana, una scatola più complicata, ecc.. L'origine di queste complicate costruzioni è incerta. Esse variano da luogo a luogo. I venditori di frutta di Roma, specialmente i venditori di fragole di Nemi, offrono la loro merce in scatole quadrate, semplici ed eleganti, costruite rapidamente con un foglio di carta rettangolare coi lati nel rapporto di 2:3, ripiegato in sei, ecc..

Dalle osservazioni fatte fino ad ora, mi sembra risultare chiaro l'interesse e l'importanza di queste ricerche.

Roma, Università.

GIOVANNI VACCA

Il Prof. Giovanni Vacca è deceduto il 6/1/1953.
Il suo necrologio è riportato nell'ALLEGATO "L"

NOTE ALL'ARTICOLO

"Della piegatura della carta applicata alla geometria"
Prof. Giovanni Vacca, "Periodico di Matematiche", Gennaio 1930

NOTA 1

"Travels of a Chinese Poet – Tu Fu, guest of rivers and lakes", II, A.D. 759-770.
Parte V: "At Chengtu, A.D. 760, pag. 85, "River Village"

NOTA 2

摺 "Piegare, raddoppiare un documento. Curvare." Da "A Chinese-English Dictionary", Herbert A. Giles, vol. 2, 1912. Riporta altri 16 esempi d'uso della parola.

NOTA 3

"Practical Kindergarten handbook". Questo libro, originariamente in francese, è una versione libera e semplificata del "Paedagogik des Kindergartens" (F. Froebel, raccolto da W. Lange, Enslin, Berlino 2862) e di altri scritti di Froebel. Una traduzione inglese completa del "Paedagogik..." è stata pubblicata da J. Jarvis nel 1905, in due volumi. La piegatura della carta è trattata nel Vol. II "Education by Development". L'elenco di modelli noti all'epoca, riportato nell'ALLEGATO "A" (edizione italiana del "Practical Kindergarten Handbook", 1871), è probabilmente opera dello stesso Jarvis e non di Froebel.

NOTA 4

"Famous problems of elementary geometry"
an authorized translation of F. KLEIN'S "Vorträge über ausgewählte fragen der Elementargeometrie ausgearbeitet von F. Tägert"

by Woodster Woodruff Beman and David Eugene Smith

Ginn & C. - copyright 1897 - British Library shelf mark 08532 de 68

Chapter V - General considerations on algebraic constructions -

1. We shall now lay aside the matter of construction with straightedge and compasses. Before quitting the subject we may mention a new and very simpIe method of effecting certain constructions, paper folding. Hermann Wiener has shown how by paper folding we may obtain a network of the regular polyhedra. Singularly, about the same time, a Hindu mathematician, Sundara Row of Madras, published a little book, Geometrical Exercises in Paper Folding (Madras, Addison & Co, 1893), in which the same idea is considerably developed. The author shows how by paper folding we may construct by points such curves as the ellipse, cissoid, etc.

(**a cura di Roberto Morassi e Brian Bishop)**

ALLEGATO "A"

Friedrich Fröbel's

gesammelte pädagogische Schriften.

Herausgegeben

von

Dr. Wichard Lange.

Zweite Abtheilung:

Friedrich Fröbel als Begründer der Kindergärten.

Berlin, 1862.

Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.

(Adolph Enslin.)

Pädagogik des Kindergartens.

Gedanken Friedrich Fröbel's

über das

Spiel und die Spielgegenstände des Kindes.

Herausgegeben

von

Dr. Wichard Lange.

Mit 16 lithographirten Tafeln.

Berlin, 1862.

Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.

(Adolph Enslin.)

MANUALE PRATICO
DEI
GIARDINI D'INFANZIA

DI FEDERICO FROEBEL

AD USO DELLE EDUCATRICI E DELLE MADRI DI FAMIGLIA

COMPOSTO SOPRA I DOCUMENTI TEDESCHI

DA F.-J. JACOBS

TRADOTTO DAL FRANCESE

DA

M. M. T.

PRIMA EDIZIONE ITALIANA

MILANO
STABILIMENTO DELL'EDITORE GIUSEPPE CIVELLI
e presso le case filiali in
FIRENZE — TORINO — VERONA — ANCONA e ROMA
1871.

LA PIEGATURA

« Il y a un lien naturel entre l'activité du corps et le « développement de l'intelligence. — L'action conduit à « l'observation, celle-ci suscite la pensée ».

FROEBEL.

La piegatura della carta, che a primo aspetto sembra un giuoco così insipido, una occupazione così insignificante reca meraviglia quando se ne conosce lo scopo, e se ne vede l'applicazione nel Giardino d'Infanzia. Il quadrato di carta che Froebel dà al fanciullo, contiene per lui una geometria, un libro d'arte tutto intero. Piegandolo il fanciullo vi esercita la mano, mentre le spiegazioni geometriche sviluppano la sua intelligenza, e la creazione delle forme estetiche desta i suoi sentimenti artistici.

Ma noi non ci arresteremo qui; soltanto la vita del lavoro può farne apprezzare tutta l'utilità.

Il quadrato è il punto di partenza della piegatura.

Se ne tagliano quattro in un foglio di carta bianca.

(Nelle scuole popolari si possono adoperare a questo effetto le carte scritte e i quinterni di scrittura).

Per ottenere regolarmente i quattro quadrati si fa l'operazione seguente (Vedete la Tavola LII):

Ponete il foglio di carta aperto dinanzi a voi sopra la tavola; esso forma un quadrato lungo (rettangolo) avente uno dei suoi lati maggiori rivolto verso la persona che piega (fig. *a*). Piegatelo per lungo in due parti eguali; avrete un rettangolo piegato in due chiuso dalla vostra parte (fig. *b*).

Prendete a dritta l'angolo aperto del rettangolo superiore, e piegatelo sopra il lato maggiore del rettangolo; dividerete così in due l'angolo destro pel lato chiuso (fig. *c*).

Fate la stessa operazione all'angolo sinistro (fig. *d*). Dopo aver rivolta la forma, ripetete questa operazione pel rettangolo inferiore, e vi troverete davanti un trapezio (fig. *e*).

Spiegate la vostra forma nella sua base, avrete un esagono (fig. *f*), nella quale la carta è semplice ai due lati minori e doppia ai quattro altri. In questa figura si vedono quattro triangoli, posti a due a due dai due lati della forma. Essi riuniscono rispettivamente i loro vertici nelle linee *AB* e *CD*.

Queste due linee sono nello stesso tempo le basi di due triàngoli più grandi *ABC* e *CDF*, formati ognuno da due pieghe.

Piegate la forma due volte; una volta sopra ciascuna delle basi *AB*, *CD*, e tagliatele in queste pieghe.

Tagliate egualmente i due triangoli minori, di cui si compongono i vostri due pezzi staccati; ed otterrete quattro triangoli doppi (fig. *g*), che essendo spiegati daranno quattro quadrati (fig. *h*).

Rimane del foglio di carta una piccola fèttuccia che i fanciulli utilizzeranno più innanzi, perchè Froebel non vuole che i principii di Economia siano dimenticati nell'educazione della prima infanzia.

La maniera di tagliare e di tenere il coltello non deve sfuggire alla sorveglianza dell'educatrice; i lavori manuali sono la ginnastica della mano, e se le giovinette si mostrano mal destre nelle loro occupazioni, è quasi sempre a cagione della negligenza che accompagna la direzione dei primi esercizii, o l'abbandono completo della bambina a sè stessa nelle sue piccole occupazioni.

Secondo il metodo indicato, tagliate molti fogli di carta e voi avrete un gran numero di quadrati, coi quali farete le forme fondamentali della piegatura. Per arrivare a queste ultime si passa per una serie di *forme matematiche*.

Questa serie è naturalmente arida pel fanciullo, ed esige da lui una attenzione continua. L'istitutrice non potrà darne la spiegazione che ai fanciulli più adulti, e dovrà pure limitarsi ad una o due pieghe per lezione. Avrà cura allora di eccitare il suo piccolo uditorio con qualche racconto interessante relativo alla materia che l'occupa. Ella può parlare, per esempio, della *fabbrica della carta*, *dell'uso della carta*, ecc.

Si parte adunque del quadrato per arrivare alla forma fondamentale.

Dopo aver parlato del quadrato e de' suoi diversi elementi, piegate il quadrato in due, e dite:

A. Divido mediante una linea obliqua il mio quadrato in due parti eguali, in due triangoli rettangoli eguali (Tav. LIII, fig. 1). Dopo aver aperto il quadrato fate lo stesso con una linea obbliqua opposta (in questo modo si vede se la superficie è ben quadrata).

B. Aprite nuovamente il quadrato, e piegatelo in senso orizzontale: « Divido mediante una linea orizzontale il mio quadrato in due metà, in due rettangoli eguali » (fig. 2). — Spiegate la carta ed osservate mano mano le metà formate della linea obliqua, e quelle che sono formate dalla linea orizzontale. « Due metà di una stessa cosa sono eguali; dunque il triangolo formato dalla linea obbliqua è eguale al rettangolo formato dalla retta orizzontale » (fig. 3).

Le osservazioni e le dimostrazioni geometriche, cui dànno luogo queste figure, sono troppe, e lo ripetiamo, qualche volta anche troppo complicate per essere comprese da fanciulli. L'educatrice deve saper adattare il suo insegnamento alla portata de'suoi allievi; essa cercherà ciò che conviene all'età e al grado di sviluppo proprio del fanciullo. La serie di nozioni geometriche che diamo, non è che una semplice indicazione; l'educatrice se ne servirà a misura che le troverà utili. Intanto non si deve calcolare troppo leggermente la capacità dell'intelligenza del fanciullo: colla ripetuta pratica dello stesso processo sopra diversi quadrati di carta, col vedere, coll'intendere la spiegazione della stessa cosa a differenti riprese ei giunge a comprendere ciò che sembra difficilissimo. D'altra parte i fanciulli alla loro età sono senza distrazioni, e possono concentrare la loro attenzione più degli uomini maturi.

Ora se si osserva la figura 3, si trova che:

a) La obbliqua che unisce i due angoli opposti di un quadrato, lo divide in due triangoli rettangoli eguali.

b) Un triangolo è la metà di un quadrato della stessa base e della stessa altezza.

c) La linea che attraversa il quadrato alla metà parallelamente a due suoi lati lo divide in due rettangoli eguali.

d) Questa retta divide egualmente in due parti eguali ciascuno dei due lati, che riunisce.

e) Se la linea obliqua divide tutto il quadrato in due parti eguali, deve pure dividere in due angoli eguali gli angoli retti situati alle sue estremità. Questi nuovi angoli sono angoli acuti; ciascuno di questi è la metà di un angolo retto. Donde si conchiude: La somma degli angoli di un triangolo rettangolo è eguale a quella di due angoli retti, ed i due angoli situati sul lato maggiore, sulla ipotenusa, equivalgono all'angolo retto che loro si oppone.

f) In un triangolo il lato opposto all' angolo retto è sempre il maggiore.

g) Il triangolo rettangolo è equivalente al rettangolo che hà la stessa base, è la metà della sua altezza (ciò risulta dalla doppia divisione del quadrato in due triangoli e in due rettangoli).

h) Il rettangolo equivale al triangolo della stessa base e di una altezza doppia.

Considerando le due pieghe che dividono il quadrato, troviamo:

i) La retta obliqua e l' orizzontale, nel loro punto d' intersecazione, formano due volte due angoli opposti eguali.

E si considerano i due lati paralleli del quadrato nel loro rispetto colle linee di divisione.

j) due angoli alterni interni, o due angoli corrispondenti sopra due paralleli sono eguali.

Si può considerare la posizione degli angoli sotto molti altri rapporti; il fanciullo di cui l' occhio e l' intelligenza sono abbastanza sviluppati, troverà piacere a cercarli.

Ritorniamo alla piegatura; l'ultima forma che abbiam fatta è un doppio rettangolo, avente uno de'suoi lati chiuso. Partendo da questo punto piegate pel mezzo questa forma per farne un quadrato. Uno dei lati di questo quadrato è interamente chiuso, un secondo è metà chiuso e metà aperto, e i due altri sono aperti. Spiegate il quadrato e vi troverete il rettangolo (fig. 4).

k) La breve linea trasversale, che passa nel mezzo d'un rettangolo e lo divide in due rettangoli eguali — qui invece in due quadrati eguali.

l) Gli angoli interni dello stesso lato, formati sopra due parallele, possono avere ciascuno la forma dell'angolo retto. — Due di questi angoli hanno sempre il valore di due angoli retti.

La trasversale forma sopra ciascuno dei lati lunghi del rettangolo una volta due angoli. Si chiamano due angoli adiacenti, e sono in questo caso due angoli retti.

Spiegate interamente il quadrato e vi troverete (fig. 5).

m) Due trasversali, di cui una divide la lunghezza e l'altra la larghezza del quadrato in due parti eguali; si tagliano al centro della figura e la dividono in quattro quadrati eguali.

n) Ogni nuovo quadrato è il quarto del quadrato primitivo; tutti quattro sono della stessa forma e della stessa grandezza. Sotto il rispetto della forma sono simili al quadrato primitivo; ne differiscono solo per la grandezza.

Questo ne conduce alla conclusione seguente:

o) La stessa forma non richiede la stessa grandezza.

Si osserva che nelle sue svariate occupazioni, Froebel ripete ad ogni istante le regole e le osservazioni già fatte. Ciò è proprio del suo sistema. Egli non fa un trattato di geometria, ed in conseguenza non dà nozioni matematiche da imparare a memoria.

Il fanciullo non apprende che mediante impressioni ed esperienze; perchè si conservino, bisogna che sieno riprodotte sovente, ed affinchè questa riproduzione non istanchi l'allievo, Froebel ha cura di presentargliela spesso sotto altra forma. Sappiamo del resto che non è come scienza, ma come fondamento d'ogni retto ragionamento, che egli parla al fanciullo di matematica.

Ritorniamo alla nostra figura: se si osservano con attenzione gli angoli formati al centro del quadrato dalle due trasversali (quattro angoli retti); quelli che sono formati nello stesso punto dalle due linee precedenti e dalla linea obliqua (due angoli retti o quattro angoli acuti); finalmente quelli che formano dello stesso luogo l'obliqua ed una delle trasversali (due ottusi e due acuti), si fa evidente che:

p) Tutti gli angoli formati intorno ad uno stesso punto valgono insieme quattro angoli retti.

q) Due angoli adiacenti d'una linea valgono insieme due angoli retti; — perchè coprono la metà della superficie che si estende intorno ad un punto.

r) Se i due angoli adiacenti non sono retti, l'angolo ottuso è di tanto maggiore dell'angolo retto di quanto l'angolo acuto è minore di questo.

s) I due angoli ottusi al centro sono maggiori di due angoli retti, e questa differenza è precisamente ciò che manca ai due angoli acuti, perchè insieme equivalgono a due angoli retti.

Ma ritorniamo ancora alla piegatura: il quadrato piegato in quattro quadrati è il nostro punto di partenza. Sopra l'angolo, ove concorrono tutte le piegature, piegate il quadrato superiore in due triangoli rettangoli eguali (fig. 6), e dite:

Io *divido con una obliqua il quadrato superiore in due triangoli rettangoli eguali.*

Voltate la carta e fate sul rovescio la stessa operazione.

Spiegate il rettangolo: vi vedrete un triangolo applicato ad un rettangolo, che ha la stessa base e la stessa altezza (fig. 7). Il triangolo equivale evidentemente alla metà del rettangolo; d'onde la conclusione:

t) Un triangolo rettangolo è la metà del rettangolo della stessa base e della stessa altezza.

E viceversa:

u) Un rettangolo è il doppio del triangolo rettangolo della stessa base e della stessa altezza.

Con non minore evidenza la figura precedente ci dimostra:

v) Che la linea (perpendicolare) che discende dal vertice dell'angolo retto d'un triangolo rettangolo sul lato opposto, divide questo lato, come pure tutto il triangolo in due parti eguali; quest' ultimo in due triangoli rettangoli eguali.

Pieghiamo la nostra forma sulla perpendicolare del triangolo, e pieghiamo egualmente in due gli altri due quadrati. Otterremo così otto triangoli rettangoli sovrapposti; svolgete la prima piega, avrete un triangolo grande due volte tanto, e svolgendo anche questo, un quadrato doppio contenente due volte l'ultimo triangolo.

Una delle faccie di questo quadrato è divisa in quattro triangoli rettangoli eguali (fig. 8^a); l'altra in quattro quadrati eguali (fig. 8^b).

Dunque:

w) Le due oblique, unendo gli angoli opposti d'un quadrato, dividono questo in quattro triangoli rettangoli eguali; e

x) Le due trasversali, nel mentre dividonò ciascuna il quadrato in due parti eguali, se si tagliàno al centro del quadrato, lo dividono in quattro quadrati eguali.

Donde si conchiude:

y) Un quarto d'una cosa essendo equivalente ad un altro quarto della stessa cosa, ogni quadrato della figura 8^b è equivalente ad un triangolo della figura 8^a.

Spiegate interamente la forma; avrete il quadrato primitivo, nel quale si vede disegnato dalle pieghe, come quadrato interno opposto, il quadrato che abbiam testè abbandonato (fig. 9). Il paragone di questi due quadrati ci dimostra le verità seguenti:

1.° Il quadrato interno opposto è la metà del quadrato circoscritto, e viceversa questo è il doppio di quello. — Medesima forma e grandezza diversa.

I quattro triangoli posti fuori del quadrato interno gli equivalgono. Ciascuno di questi triangoli equivale dunque al quarto del quadrato interno.

2.° I due piccoli quadrati formati dalle due trasversali del quadrato primitivo contengono ciascuno due triangoli; ogni triangolo posto fuori del quadrato interno forma la metà d'un piccolo quadrato, il quarto del quadrato inscritto è l'ottavo del quadrato primitivo.

Considerando in seguito che il quadrato interno ha per lato la base, l'ipotenusa del triangolo rettangolo *x*, che gli è esterno; che questo quadrato equivale quattro volte questo triangolo; che inoltre il piccolo quadrato ha per lati gli altri lati del triangolo *x* e che questo piccolo quadrato equivale due volte al triangolo, ne risulta:

z) Il quadrato formato sopra l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è equivalente ai due quadrati che si facessero sugli altri lati.

A misura che l'intelligenza degli allievi è più o meno sviluppata, molte altre osservazioni possono esser loro presentate, sopratutto nella scuola; noi lasciamo questa cura al discernimento degli istitutori.

Ritorniamo al doppio quadrato: pieghiamolo in quattro quadrati sulla sua superficie superiore, vale a dire sopra la faccia coperta dai quattro triangoli, e ripetiamo su questo piccolo quadrato l'operazione che ci ha fatto ottenere la forma 8ª. Questa operazione ci dà di bel nuovo le stesse figure sopra forme doppie. Esse danno luogo a ripetere le spiegazioni precedenti.

Ma qui si farà osservare che le due rette oblique e le due trasversali si tagliano alla metà e formano nel quadrato un centro, che riunisce tutte le parti della figura per formare un tutto armonico. Imperciocchè l'armonia deve esistere nel fanciullo dappertutto; nel suo lavoro, come nel suo sviluppo, nel progresso delle sue invenzioni, come nell'insieme di ciascuna di esse, affinchè ne apprenda da sè la necessità e la bellezza e si abitui ad osservarla ed a cercarla in tutto.

Il fanciullo deve eziandio comprendere come una causa ripete il suo sviluppo da un'altra, e comè si trovano in una figura trasformata tutte le modificazioni ch'essa ha subite. L'ultimo quadrato ottenuto ci presenta la riunione di tutte le forme matematiche, che l'hanno preceduto; esso forma un *tutto* in relazione in quest'ultimo, ma alla sua volta questo tutto ci serve di forma individuale; è la forma primitiva, il punto di partenza delle *forme artistiche* e delle forme d'oggetti usuali.

Le figure artistiche si disegnano sulle faccie delle forme colla piegatura degli angoli al centro del quadrato (Tav. LIII, fig. 10, 11, 12 e 13). Per le figure di oggetti usuali si fa subire alla carta diverse trasformazioni: « Ponete le dita sui quattro angoli del quadrato superiore, e stringeteli gli uni contro gli altri in modo, che il centro ne esca, e che i quattro angoli della forma servano di piede alla nuova figura; poi sollvate i quattro piccoli quadrati interni, e ne risulterà una forma rappresentante una saliera a quattro calici.

« Piegate interioramente le quattro metà superiori dei piccoli quadrati, ed otterrete la pepaiuola ».

Descrivere come si sviluppi tutta la serie delle forme che si possono imitare con questo pezzo di carta, sarebbe cosa impossibile. Soltanto ripetute lezioni pratiche possono indirizzare lo spirito inventivo, che deve presiedere alla loro formazione. Intanto daremo qui una serie d'oggetti, che abbiamo veduto imitare con un quadrato di carta:

1. La saliera.
2. La pepaiuola.
3. Il sacco da viaggio.
4. Il fiore.
5. Il fiore colla stella.
6. La camiciuola.
7. Il cervo volante.
8. La seppia.
9. Il molino a vento.
10. La tavola.
11. Il porta-sigari.
12. La nave a vela.
13. Il vaso da fiori.
14. L'uccello.
15. Il doppio battello.
16. La barca del pescatore.
17. Il doppio serbatoio pei pesci.
18. La grande scatola.
19. La cornice.
20. La scatola solida.
21. Lo specchio.
22. La gondola.
23. La gondola cogli scanni.

Piegando una terza volta la forma primitiva nel senso della figura 8^a, 8^b, si ottiene un quarto quadrato interno opposto, come nuova forma fondamentale molto più solida della precedente, e che dà luogo ad un nuovo sviluppo di forme artistiche e di forme d'oggetti.

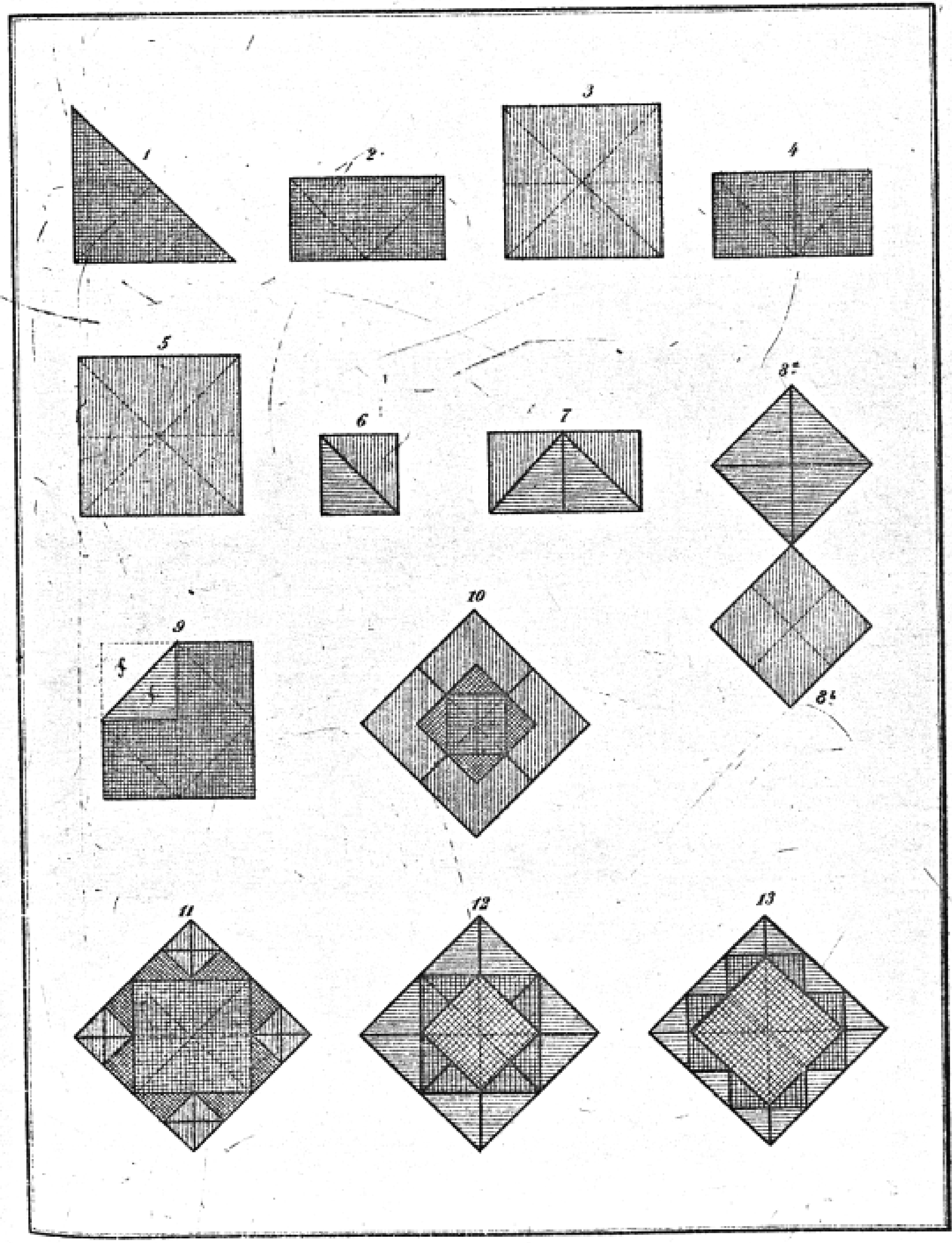
Le forme artistiche presentano sopratutto dei rosoni.

Nelle forme d'oggetti usuali si trova tra gli altri la serie seguente:

1. La borsa da lavoro.
2. Il manicotto.
3. Un paio di stivali.
4. La veste del minatore.
5. I calzoni.
6. Il cappello.
7. La croce.
8. La croce d'onore.
9. Il porta-sigari.
10. id.
11. Il doppio battello.
12. Il guardaroba.
13. La scatola chiusa.
14. Lo scrittoio.
15. La lettera a due sigilli.
16. La cornice.
17. Lo specchio.
18. La scatola.
19. La gondola semplice.
20. La gondola colle ruote.
21. La gondola a vele.
22. La gondola chiusa.

Lo spirito d'invenzione dei fanciulli troverà molte altre forme, sia cangiando le pieghe, sia riunendo parecchie forme fondamentali.

Tav. LIII.



ALLEGATO "B"

"A treatise on Geometry and its application to the arts"

By the Rev. Dionysius Lardner
in
"THE CABINET CYCLOPAEDIA"
conducted by the Rev. Dionysius Lardner, 1840
(British Library shelf mark 12203 tt 1)

Chapter IV - § 59, p. 41 -

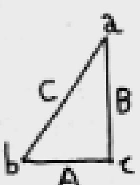


fig. 27

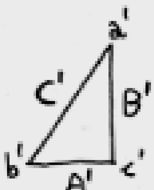


fig. 28

If the sides B and C in Fig. 27, be respectively equal to the sides B' and C' in Fig. 28, and the angle a be equal to the angle a', then the remaining side A' and the angles b' and c' will be respectively equal to the side A and the angles b and c. The superficial dimensions of the triangles will also be equal, and the figures will be so precisely alike that the one may be placed upon the other, so as exactly to cover it. To prove this, let us imagine that a pattern of the triangle in Fig. 28 is executed in card; let the vertex of the angle a' in the pattern be placed upon the vertex of the angle a, and let the side C' be laid upon the side C, and finally, let the pattern of Fig. 28 be placed down upon Fig. 27; since the side C' coincides with the side C, and the angle a' be equal to the angle a, the side B' of the pattern must be upon the side B. Also, since the sides C and C' are equal, and also the sides B and B', the ends of these sides must coincide respectively; that is, the vertex of the angle b' of the pattern must be upon the angle b, and the vertex of the angle c' of the pattern must be upon the vertex of the angle c; the ends of the side A' of the pattern will therefore coincide with the ends of the side A, and consequently these sides must lie one upon the other. The pattern, therefore, of Fig. 28 will precisely cover Fig. 27, and the angle b' will be equal to the angle b, the angle c' will be equal to the angle c, and the superficial dimensions of the triangles will be the same.

§ 61, p. 42

(Similar exposition to prove congruence of 1 side and 2 angles)

§ 64, p. 44

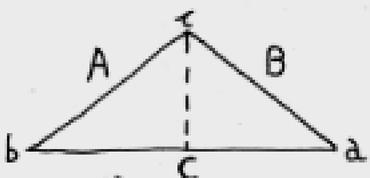


fig. 33

For if the triangle be conceived to be folded over, so that the part of it on the right of the line cC shall fall upon the part to the left of that line, these parts will exactly cover each other.

ALLEGATO "C"

PROF. PIETRO PASQUALI.

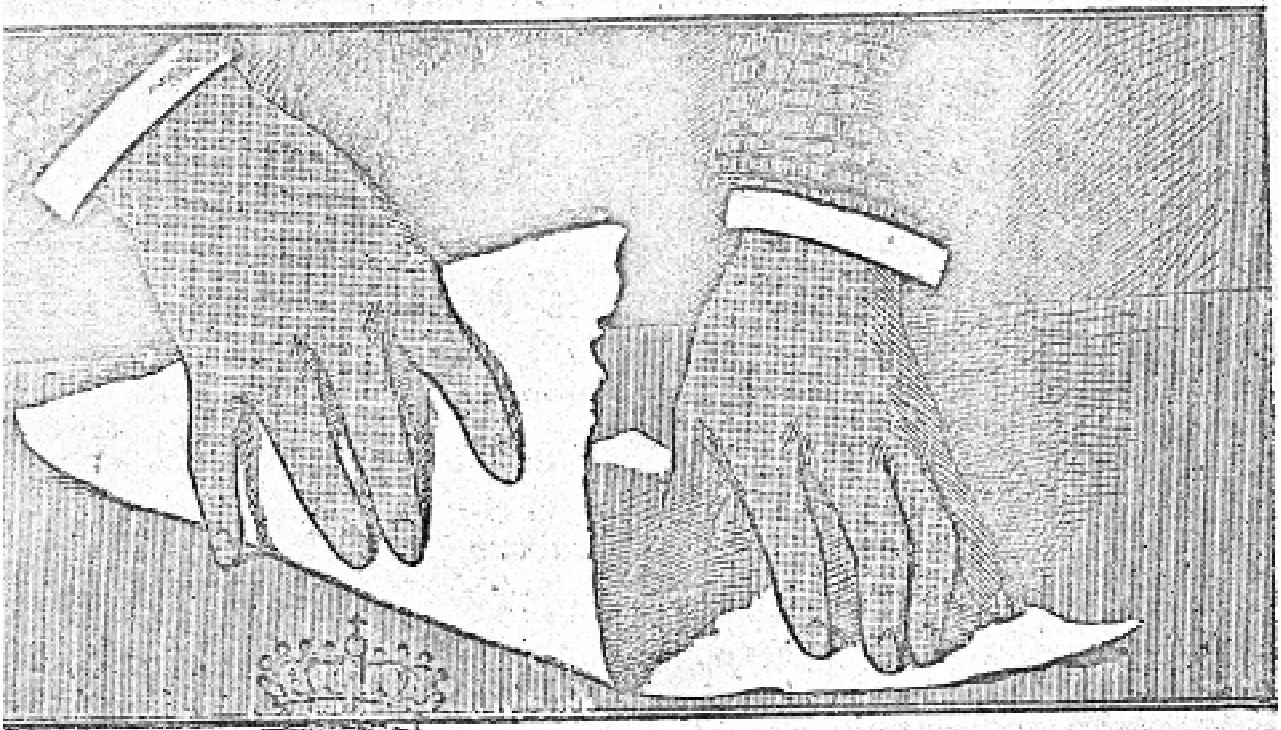
GEOMETRIA INTUITIVA

SENZA STRUMENTI

AD USO DELLE SCUOLE

elementari superiori, tecniche, normali e industriali.

(Lezioni di ritaglio geometrico.)



PREMIATA CON MEDAGLIA D'ARGENTO ALL'ESPOSIZIONE INDUSTRIALE DI BRESCIA NEL 1889.

100 figure. — 1ª edizione. — Centesimi **50.**

LENDINARA,
LIBRERIA EDITRICE LUIGI BUFFETTI

1892.

DEPOSITO:
Milano. — Casa editrice « Risveglio educativo »

DEPOSITO:
Napoli. — P. Rispoli e C.

PROF. P. PASQUALI.

GEOMETRIA INTUITIVA

SENZA STRUMENTI

AD USO DELLE SCUOLE

elementari superiori, tecniche, normali e industriali.

(Lezioni di ritaglio geometrico.)

Premiato con medaglia d'argento all'Esposizione industriale di Brescia nel 1889.

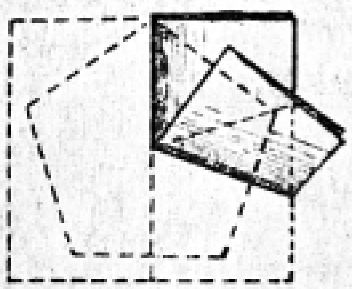
LENDINARA,
LIBRERIA EDITRICE LUIGI BUFFETTI.

1892.

Poligoni di più lati.

41. *a*) Costruire il pentagono nel seguente modo:

Piegare in due il foglietto (non occorre che sia quadrato); partendo da un punto qualunque della piegatura, rivoltare sopra sè stesso una parte del foglietto, in modo che per tentativi l'angolo rimasto scoperto sia la metà di quello sovrapposto, come si vede nella figura. Con due tagli perpendicolari ai lati dell'angolo sovrapposto ed equidistanti dal vertice, risulterà il pentagono regolare, di cui è evidente la dimostrazione. Allo stesso risultato si perviene con un taglio perpendicolare alla bisettrice dell'angolo sovrapposto, dopo avere rivoltato su questo l'angolo rimasto scoperto. La forma quadrata del foglietto dato, agevola l'operazione, come si vede nella figura.



b) Tracciare tutte le diagonali del pentagono, oppure tutte le mediane; e dire che cosa ne risulta.

c) Inscrivere un pentagono regolare in un pentagono dato.

d) Gli stessi esercizi col disegno.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Poligoni di più lati.

Esercizio 41. — Ritagliare un pentagono regolare.

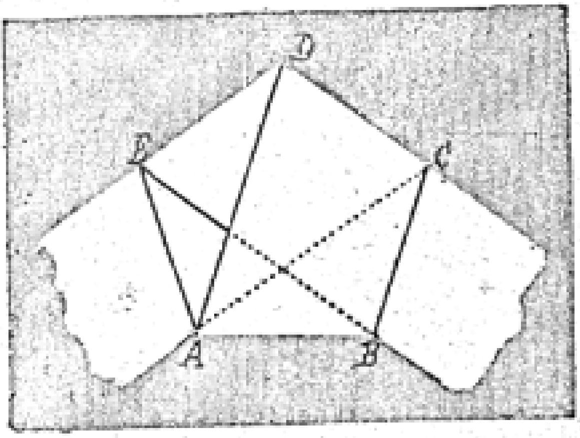


Fig. 23.

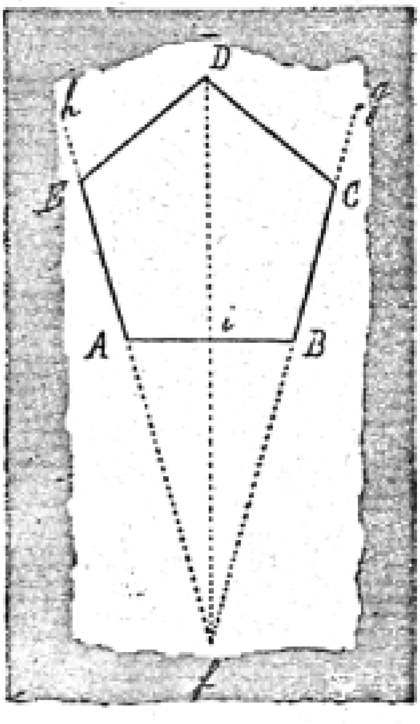


Fig. 24.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Esecuizone 41. — Chi sa eseguire con precisione un semplicissimo nodo da cravatta (fig. 23), prenda un lungo rettangolo, costruisca il nodo, stringa bene le piegature, sì che non rimanga spazio fra l' una e l' altra, ed otterrà il pentagono *A B C D E,* che egli potrà sovrapporre sur un foglietto allo scopo di ritagliare un pentagono tutto d' un pezzo.

Si può risolvere il problema anche nel seguente modo (fig. 24): si determina il lato *A B,* s' innalza la piegatura *f D,* si trasporta la *B i* tre volte sulla direzione *i f,* e dal punto *f* si fa partire una doppia piegatura *f h, f g ;* su queste due si trasporta il lato per mezzo della sovrapposizione ; lo si trasporta pure a dar i due lati *E D, C D,* e si ottiene il pentagono domandato.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Esercizio 42. — Ritagliare un esagono regolare.

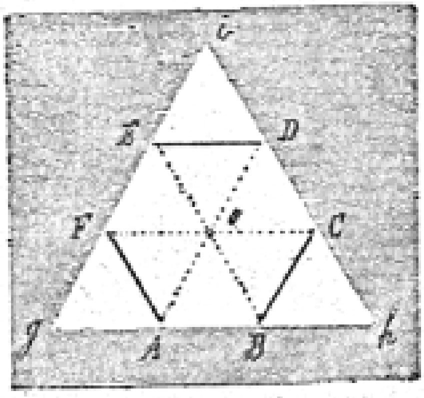


Fig. 25.

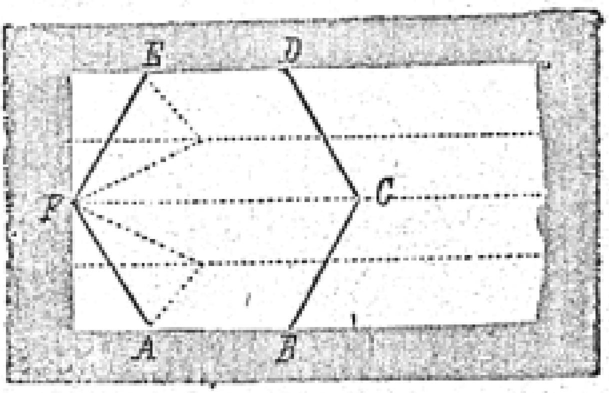


Fig. 26.

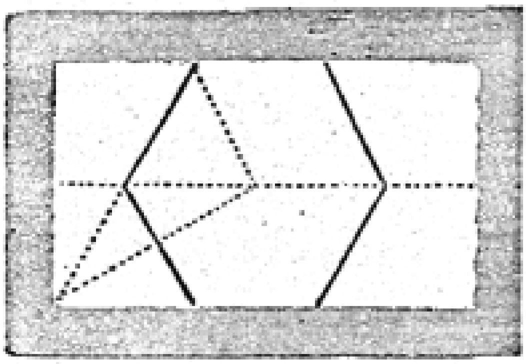


Fig. 27.

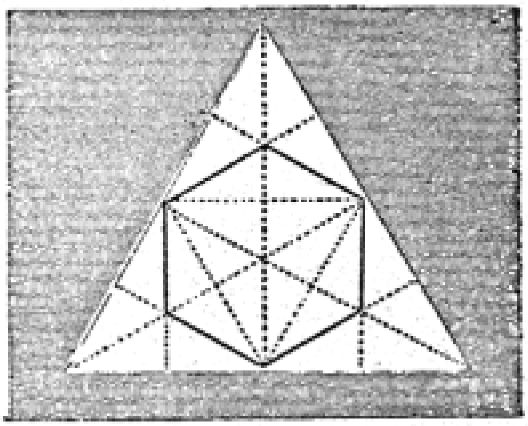


Fig. 28.

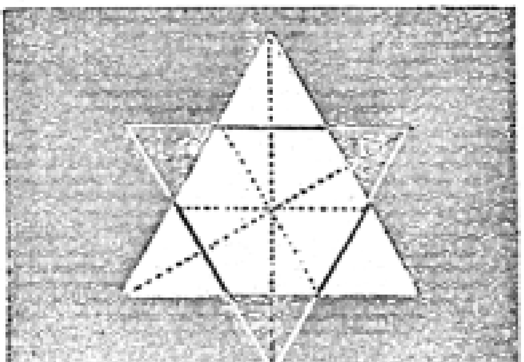


Fig. 29.

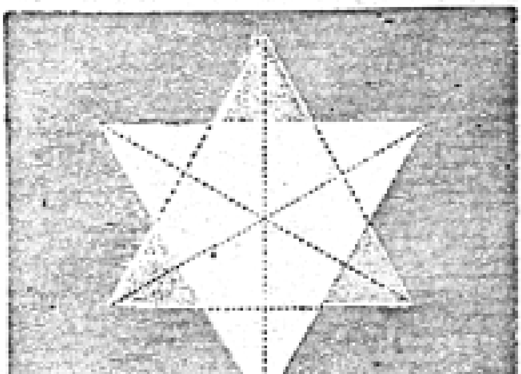


Fig. 30.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Esecuzione 42. — Si può operare in più modi: Uno di questi consiste nel ritagliare un triangolo equilatero e poi piegare al centro *O* i tre vertici *g*, *h*, *i*, (fig. 25).

Secondo metodo: (fig. 26) si ritagli un rettangolo si divida in 4 parti uguali longitudinali, per mezzo di tre piegature; si eseguisca la doppia piegatura *E F*, *A F* facendo cadere i vertici come si vede nella figura; le due piegature *E F*, *A F* saranno due lati eguali dell' esagono; si trasportano in *E D* ed in *A B*, poscia in *D C* e *B C*, e l' esagono sarà costruito.

Allo stesso risultato si arriva, facendo una sola piegatura sulla mediana più lunga, e ripiegando in modo analogo all' antecedente gli angoli consecutivi sulla stessa mediana.

Se ben si osserva queste due esecuzioni sono fondate sulla costruzione del triangolo equilatero.

Altri due modi si vedranno meglio al n. 43, quando si tratterà di raddoppiare il numero dei lati d' un poligono regolare qualunque.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Esercizio 43. — Costruzione dell'ottagono.

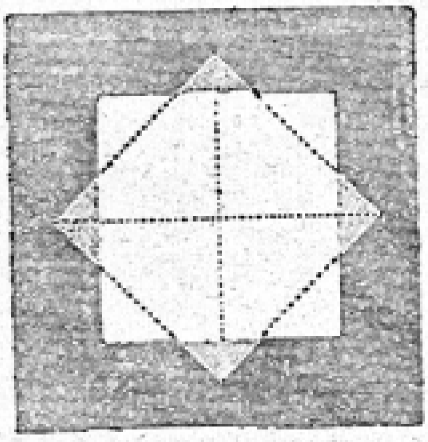


Fig. 31.

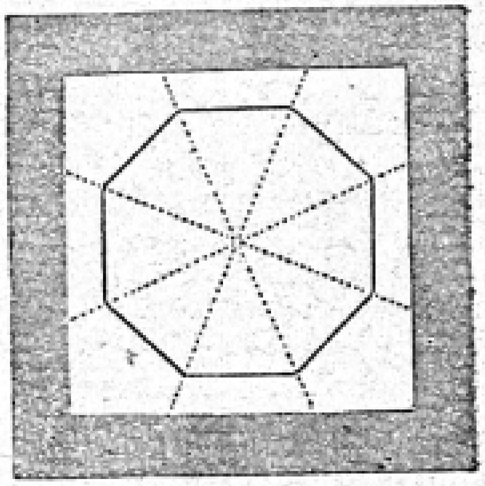


Fig. 32.

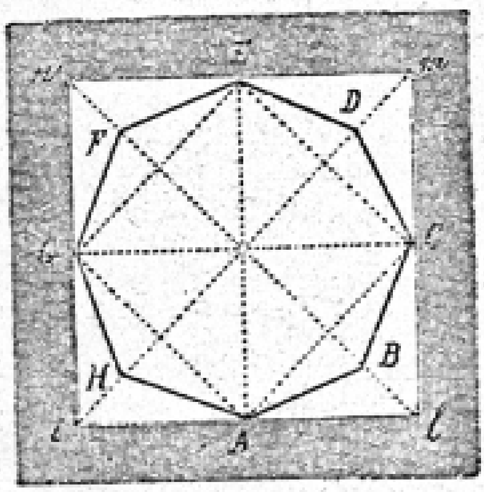


Fig. 33.

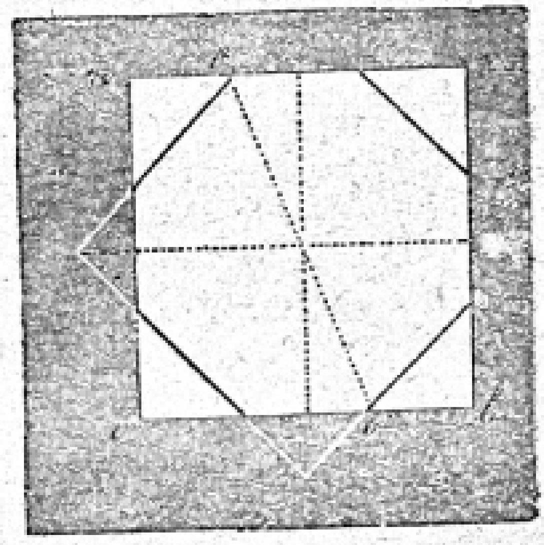


Fig. 34.

2a edizione (1892): metodo diverso !

Soluzione con due triangoli equilateri identici:

Bisogna far coincidere i due centri e l'apotema dell'uno colla bisettrice dell'altro, affinchè l'incrociamento risulti perfetto.

Esecuzione 43. — Anche qui bisogna far coincidere fra loro i due centri e la diagonale dell'uno colla mediana dell'altro. Così nell'incrociamento degli altri poligoni si faranno coincidere i centri e la bisettrice coll'apotema. Si osserverà che la terza soluzione del n. 43 non è altro che un'applicazione dell'incrociamento dei poligoni, (fig. 31).

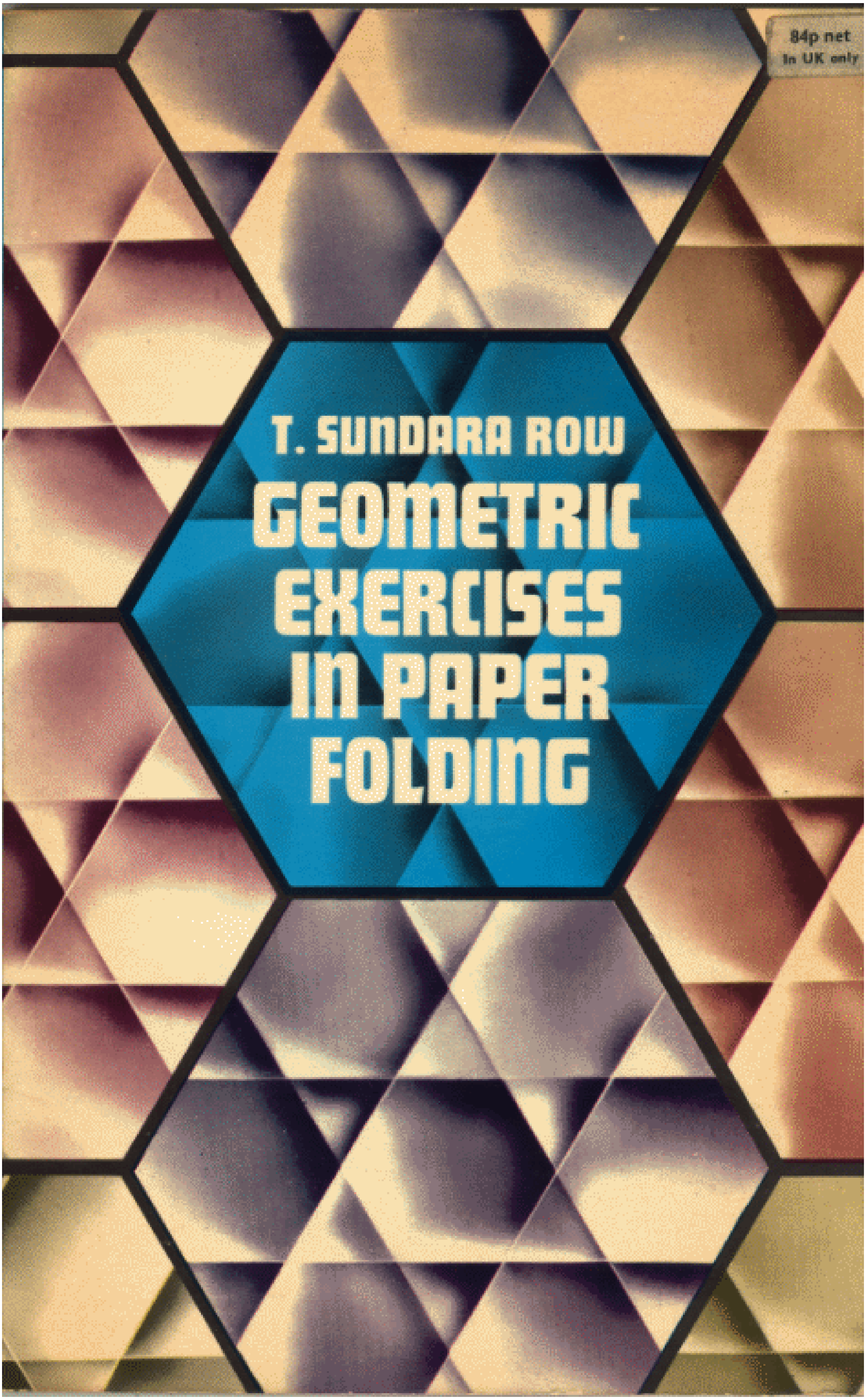
Altra soluzione:

Si piega il foglietto in ottavo triangolare isoscele, pareggiando la lunghezza delle piegature; e si ritaglia il superfluo, come si vede nella figura, (fig. 32).

Oppure: (fig. 33) Si ritaglia il quadrato *i l m n*, si trovano le diagonali e le due mediane, si piega in angolo in *E* e quello in *G;* si divide per metà e le due piegature *C F*, *F E* saranno due lati dell'ottagono; le stesse operazioni sulle altre tre parti del quadrato.

Oppure: Si ritaglia il quadrato *i l m n;* se ne trovano le mediane e le diagonali, e mediante la pie-

ALLEGATO "D"



84p net
In UK only
T. SUNDARA ROW
GEOMETRIC EXERCISES IN PAPER FOLDING

GEOMETRIC EXERCISES IN PAPER FOLDING

T. SUNDARA ROW

Edited and Revised by Wooster Woodruff Beman and David Eugene Smith

As the title suggests, this book is more than just a collection of casual paper-folding recreations. The "tools" required are minimal—only paper, a pencil, and a penknife or pair of scissors; the skills needed belong to everyone. But the exercises themselves are as useful in teaching plane geometry as they are fun in and for the doing. Originally published in this edition (which was prepared by two professors of mathematics) a half-century ago, the book is still engaging and still useful.

The author did not attempt to write a complete geometry text book. His intention was only to show how regular polygons, circles, and other curves can be folded or pricked on paper and then used to demonstrate geometric propositions, to set up well-known problems of ancient and modern geometry, and to show how algebra and trigonometry may be applied to geometry. The first nine chapters deal with the regular polygons (square, equilateral triangle, rectangle, pentagon, hexagon, octagon, decagon, dodecagon, pentedecagon) and the nonagon. Chapter X deals with the arithmetic, geometric, and harmonic progressions and the summation of certain arithmetic series; XI with the general theory of regular polygons and the calculation of "pi"; XII with such general principles as congruence, symmetry, and similarity of figures; and XIII and XIV with the conic sections and other interesting curves.

In the course of these chapters, scores of geometric properties and proofs are graphically demonstrated simply by folding squares of paper according to the author's instructions or by drawing the lines he so clearly indicates. 87 illustrations—not only line drawings, but dozens of photographs of actual folded sheets as well—accompany the step-by-step text. These make the instructions virtually foolproof; they are also adaptable to classroom use.

Unaltered, unabridged republication of 1905 revised edition. Editors' preface. Author's introduction. 87 line drawings and photographs. Bibliography in notes. xii + 148pp. 5⅜ x 8½. 21594-6 Paperbound

Cover designed by Frank J. Moore.

ALLEGATO "E"

Atti della R. Accademia dei Lincei
n. VI, pag 54

Matematica. — *Sulla definizione dell'area d'una superficie.* Nota di G. Peano, presentata dal Socio Casorati.

« Scopo della presente Nota è l'esame delle varie definizioni date dell'area di una porzione qualunque di superficie (non piana), e di alcune questioni relative.

« I geometri greci, ragionando sulla lunghezza di linee e sull'area di superficie (sfera, cilindro, ecc.), partivano da *postulati* invece che da *definizioni.* Però la differenza è solo formale. I postulati enunciati da Archimede (1) valgono esattamente le seguenti definizioni:

1) *Lunghezza d'un arco curvilineo piano convesso è il valore comune del limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali inscritte, e del limite inferiore delle circoscritte.*

2) *Area d'una superficie convessa è il valore comune del limite superiore delle aree delle superficie poliedriche convesse inscritte, e del limite inferiore delle circoscritte.*

« Egli dimostra per le curve e superficie studiate la coincidenza dei due limiti, la quale si potrebbe anche dimostrare in generale.

« Ora la prima definizione non vale per le linee non piane. Essa si può rendere applicabile in ogni caso omettendo le linee circoscritte, così:

3) *Lunghezza d'un arco curvilineo è il limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali inscritte in esso* (2).

« Ma la seconda definizione, per le aree, non è applicabile alle superficie concavo-convesse, e pare difficile il renderla applicabile in ogni caso.

« I procedimenti, per determinare la lunghezza d'un arco e l'area d'una superficie, seguiti dai varî matematici fino al principio del corrente secolo,

(1) Della sfera e del cilindro, libro I, *λαμβανόμενα.*

(2) Questa definizione è più semplice della comune, essendo più semplice il concetto di *limite superiore d'un sistema di quantità*, che quello di *limite verso cui tende una quantità variabile.* Da essa si deduce, senz'altro, che ogni arco ha una lunghezza finita o infinita. Già usai tale definizione nelle mie *Applicazioni geometriche del calcolo differenziale*, pag 161. Il sig Jordan nel suo *Cours d'Analyse*, t. III, pag 594, dimostrò la coincidenza delle due definizioni nei casi più comuni.

erano poco esatti ([1]). Solo nei trattati di calcolo relativamente recenti si suol definire la lunghezza d'un arco e l'area d'una superficie. Ora, se la prima definizione non presenta difficoltà, la seconda lasciò sempre a desiderare. La definizione data da Serret e riportata da tanti autori, nella quale si considera il limite verso cui tende una superficie poliedrica inscritta, non vale; poichè una tale superficie poliedrica può tendere, dipendentemente dal modo di variare delle sue faccie, verso ogni limite maggiore di quella quantità che da tutti si chiama area della superficie ([2]).

« Il compianto Harnack, nella versione del trattato del Serret ([3]), aggiunge la condizione che le faccie della superficie poliedrica siano triangoli i cui angoli non si avvicinino indefinitamente a 0. Ma nemmeno con questa condizione la definizione risulta soddisfacente, potendosi ancora fare la medesima obbiezione.

« Il sig. Hermite ([4]) dice: *Nous abandonnerons donc la surface polyédrale, qui est l'analogue du polygone inscrit dans un arc de courbe ...*, e definisce l'area come il limite d'un sistema di poligoni non contigui, tangenti alla superficie. Questa definizione, del tutto rigorosa, lascia a desiderare in quanto che in essa entrano esplicitamente gli assi di riferimento.

« Si può ottenere ad un tempo il rigore e l'analogia fra le definizioni relative all'arco e all'area, ove si faccia uso, oltrechè del concetto di retta limitata considerata in grandezza e direzione (*segmento*, *vettore*), anche del concetto dualitico di area piana considerata in grandezza e giacitura. Questi enti furono introdotti in geometria specialmente per opera di Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann e Hamilton. Un'area piana così considerata, o meglio la linea suo contorno, si può chiamare *bivettore*, essendo essa il prodotto, secondo Grassmann, di due vettori ([5]).

([1]) Così in Lagrange, *Theorie des fonctions analytiques*, Paris 1813, pag. 300, il risultato è ottenuto per mezzo d'una asserzione non esatta.

([2]) Questa osservazione trovasi pubblicata per la prima volta nelle lezioni da me date all'Università di Torino nell'anno 1881-82 e litografate dagli allievi, a pag. 143, lezione del 22 maggio 1882. La stessa osservazione fu pure fatta dal sig. Schwarz, e da questi comunicata al sig. Hermite, il quale la pubblicò nel suo *Cours professé à la faculté des sciences, pendant le second sem. 1882, second tirage*, pag. 35, qualche tempo dopo la mia pubblicazione. L'errore principale commesso da Serret sta nel ritenere che il piano passante per tre punti d'una superficie abbia per limite il piano tangente alla medesima, proposizione questa evidentemente falsa.

([3]) *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung*, vol. II, 1885 pag. 295. Dalla condizione imposta dall'Harnack risulta effettivamente che i piani delle faccie tendono verso i piani tangenti. Il difetto sta in ciò che se $z=f(x,y)$ è l'equazione d'una superficie, e $f(x,y)$ è univoca, non ne risulta come conseguenza che ogni superficie poliedrica inscritta non possa essere incontrata da una parallela all'asse delle z in più di un punto.

([4]) Ib. Troisième édition (1887) pag. 36.

([5]) Usai il nome di bivettore, corrispondente a quello di vettore introdotto da Hamilton, nel mio Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann (1888).

« Si ha la proposizione:

4) *Data una linea chiusa (non piana)* l, *si può sempre determinare una linea piana chiusa o bivettore* l', *in guisa che, proiettando le due linee* l *e* l' *su d'un piano arbitrario, con raggi paralleli di direzione arbitraria, le aree limitate dalle loro proiezioni risultino sempre eguali.*

« Questa proposizione è conseguenza immediata della somma, o composizione, dei bivettori, quando la linea l è poligonale. Il solito passaggio al limite permette di dimostrarla quando la l è una linea curva, descritta da un punto avente sempre derivata finita, ed anche in altri casi. Le aree si debbono considerare tenendo il debito conto dei segni.

« In virtù della proposizione 4), potremo chiamare bivettore ogni linea chiusa, piana o no; due bivettori l ed l' che soddisfino alle condizioni della proposizione 4) si dicono *eguali*, o *equipollenti*. Per *grandezza* e *giacitura* d'un bivettore non piano l, si intende la grandezza e la giacitura del bivettore piano equipollente l' (1).

« È chiaro che:

5) *Se si proietta ortogonalmente la linea chiusa (non piana)* l *su d'un piano variabile, il massimo dell'area limitata dalla proiezione di* l *vale la grandezza del bivettore* l; *e questo massimo avviene quando il piano su cui si proietta ha la giacitura di* l.

« Se ora si intende per *vettore d'un arco di curva* il vettore limitat dagli estremi dell'arco, cioè la sua corda considerata come vettore, la definizione 3) si può pure enunciare:

6) *Lunghezza d'un arco di curva è il limite superiore della somma delle grandezze dei vettori delle sue parti.*

« Analogamente se si intende per *bivettore d'una porzione di superficie* il bivettore formato dal contorno di essa, si può assumere per definizione:

7) *Area d'una porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti* (2).

« Fra il vettore d'un arco di curva, e il bivettore d'una porzione di superficie passa una analogia completa. Così alla proposizione che, sotto certe condizioni,

8) *La direzione del vettore d'un arco infinitesimo di curva è quella della tangente; e il rapporto fra la sua grandezza e la lunghezza dell'arco è l'unità,*

(1) La proposizione 4) è di utilità in molte questioni di geometria. Si consideri p. e. una spira d'un'elica, i raggi che vanno ai suoi estremi, e la porzione compresa di asse; si ha così una linea chiusa, e si riconosce facilmente che essa è equipollente alla circonferenza base del cilindro su cui sta l'elica: quindi proiettando su piani con raggi paralleli le due linee, si deducono le aree di varie curve piane.

(2) Questa definizione, qualora si sostituisca al posto di grandezza d'un bivettore il suo significato, si trasforma in quella da me data nelle *Applicazioni geometriche*, pag. 164.

corrisponde la proposizione che, sotto condizioni analoghe,

9) *La giacitura del bivettore d'una porzione infinitesima di superficie è quella del piano tangente; e il rapporto fra la sua grandezza e l'area di quella porzione è l'unità.*

« La proposizione:

10) *Il primo termine nello sviluppo della differenza fra un arco* s *e la sua corda, secondo le potenze ascendenti di* s, *è*

$$\frac{s^3}{24R^2},$$

ove R *è il raggio di curvatura,*

ha per analoga:

11) *Il primo termine nello sviluppo secondo le potenze di* ϱ, *della differenza fra l'area d'un cerchio geodetico tracciato sulla superficie, di raggio* ϱ, *e la grandezza del suo bivettore, è*

$$\frac{\pi\varrho^4}{8}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right)=\frac{\pi\varrho^4}{4}C,$$

ove R_1 *e* R_2 *sono i raggi di curvatura principali, e* C *è la curvatura della superficie secondo la definizione del prof. Casorati* » [1].

Matematica. — *Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazi ad n dimensioni.* Nota del dott. A. Del Re, presentata dal Socio Cremona.

« 1. Nello spazio lineare ad n dimensioni S_n si hanno $\frac{n}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$

ALLEGATO "F"

RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

« Je n'écris pas principalement pour ceux qui sont du tout ignorants, et qui sont si hébétés et tardifs à comprendre les propriétés des nombres. »

(BACHET DE MÉZIRIAC)

II

Qui perd gagne. — Les Dominos.
Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-Tête.
Les Jeux de Demoiselles.
Le Jeu icosien d'Hamilton.

NOUVEAU TIRAGE

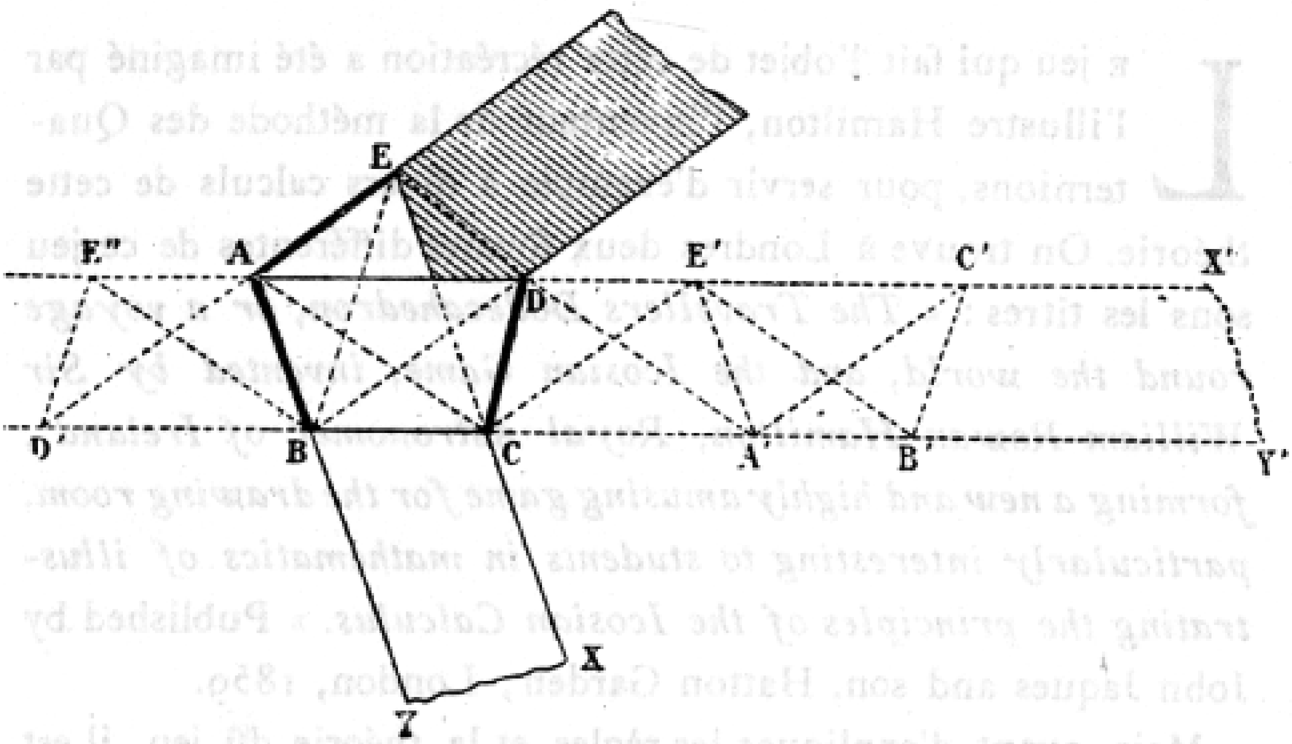
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS

1979

LE NŒUD DE CRAVATE.

On trouve dans tous les Traités de Géométrie la construction du pentagone régulier à l'aide de la règle et du compas. On sait encore que Mascheroni a donné le moyen de construire le pentagone à l'aide du compas seul. Enfin, on peut obtenir le pentagone régulier en faisant le nœud de sa cravate, de la manière suivante. Avec la cravate, un ruban ou une bandelette de papier à bords parallèles, on fait un nœud simple et serré, sans froisser l'étoffe ou le papier, ainsi que nous l'avons représenté dans la *fig.* 91;

Fig. 91.



les traits fins désignent les bords du papier; les traits plus forts sont les plis; les parties blanches comprises dans le périmètre formé par les traits pleins appartiennent à l'endroit, et la partie ombrée appartient à l'envers. Il s'agit de démontrer que la figure ABCDE représente un pentagone régulier, lorsque l'on suppose le papier sans épaisseur.

En développant la bande de papier sur le prolongement du trapèze ABCD, on trouve trois autres trapèzes

$$D'E''AB, \quad CDE'A', \quad E'A'B'C',$$

dans lesquels les lettres pareilles viennent coïncider lorsque l'on reforme le nœud; de telle sorte que

A et A′ sont symétriques par rapport à la droite CD,
D et D′ . . . . AB,
C et C′ . . . . A′E′.

De l'égalité des angles $A'E'D$ et $AE''D'$, il résulte que AB est parallèle à $A'E'$; par suite $A'E' = D'E''$ et l'on a

$$(1) \qquad AE = AE'' = A'E' = DE = DE' = D'E'';$$

de l'égalité des angles ABC et $A'B'C'$, il résulte $AB = B'C'$, et aussi

$$(2) \qquad AB = A'B' = BC = B'C';$$

enfin, de l'égalité des angles BAE'' et $B'A'E'$, il résulte $AB = AE$. Donc les dix longueurs contenues dans les égalités (1) et (2) sont égales entre elles ; mais, dans le parallélogramme $ABA'E'$, on a $BC = DE'$; donc $AD = CA'$, et le parallélogramme $ACA'D$ est un losange.

On en déduit l'égalité des quatre trapèzes; par conséquent la figure ne contient que deux sortes de lignes de longueurs différentes; par suite les triangles ABC, BCD CDE sont égaux, et la figure ABCDE est un pentagone régulier, puisque tous ses angles sont égaux entre eux, ainsi que les côtés.

ALLEGATO "G"

Bullettino di bibliografia e di storia delle
scienze matematiche e fisiche.
Pubblicato da B. Boncompagni. XVI. Roma 1868-87

INTORNO AL PROBLEMA « LE NOEUD DE CRAVATE »

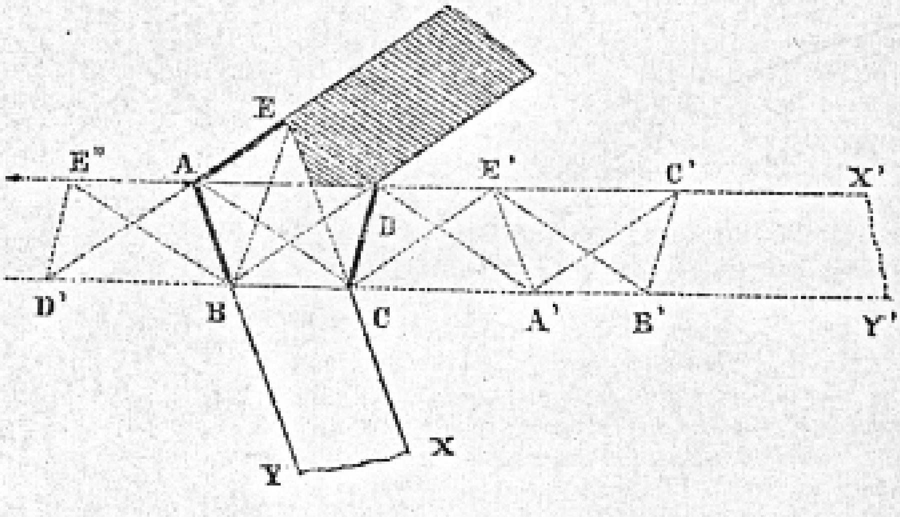
E AD ALCUNE OPERE

DI URBANO D'AVISO ROMANO

Il Signor Edouard Lucas nel volume secondo delle interessantissime sue *Recreations mathématiques* (1), e precisamente nella settima che intitola: « Le » jeu d'Hamilton » (2), prima di spiegare le regole, ed esporre la teoria del predetto giuoco, ritenendo indispensabile di premettere alcune considerazioni sul pentagono e sul dodecaedro regolare, comincia col problema, che chiama « *Le noeud de Cravate* ». Riporto qui quanto egli scrive:

« LE NOEUD DE CRAVATE

» On trouve dans tous les traités de Géometrie la construction
» du pentagone régulier à l'aide de la règle et du compas. On sait
» encore que Mascheroni a donné le moyen de construire le penta-
» gone à l'aide du compas seul. Enfin, on peut obtenir le pentagone
» régulier en faisant le nœud de sa cravate, de la manière suivante.
» Avec la cravate, un ruban ou une bandelette de papier à bords
» parallèles, on fait un noeud simple et serré, sans froisser l'étoffe
» ou le papier, ainsi que nous l'avons représenté dans la *fig.* 91;



» les traits fins désignent les bords du papier; les traits plus forts
» sont les plis; les parties blanches comprises dans le périmètre formé

(1) RECREATIONS ‖ MATHEMATIQUES ‖ PAR ‖ M. EDOVARD LUCAS ‖ II ‖ *Qui perd gagne.* — *Les Dominos* ‖ Les Marelles. Le Parquet — Le Casse — Tête. ‖ Les jeux de Damoiselles. ‖ Le jeu icosien d'Hamilton. ‖ PARIS ‖ GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE ‖ QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55. ‖ 1883. ‖ (Tous droits réservés).

(2) RECREATIONS ‖ MATHÉMATIQUES ‖ PAR M. EDOVARD LUCAS ‖ II. ‖ ecc. ‖ PARIS ‖ ecc. ‖ 1883. ‖ ecc., pag. 201.

» par les traits pleins appartiennent à l'endroit, et la partie ombrée
» appartient à l'envers. Il s'agit de démontrer que la figure ABCDE
» représente un pentagone régulier, lorsque l'on suppose le papier
» sans épaisseur.

» En développant la bande de papier sur le prolongement du
» trapéze ABCD, on trouve trois autres trapézes.

» D'E''AB , CDE'A' , E'A'B'C',

» dans lesquels les lettres pareilles viennent coincider lorsque l'on
» reforme le nœud; de telle sorte
» A et A' sont symétriques par rapport à la droite CD,
» D et O' . . . . AB
» C et C' . . . . A'E'.
» De l'égalité des angles A'E'D et A E'' D', il résulte que AB est
» paralléle à A'E'; par suite A'E' = D'E'' et l'on a

» (1) $AE = AE'' = A'E' = DE = DE' = D'E''$;

» de l'égalité des angles ABC et A'B'C', il résulte AB = B'C', et
» aussi

» (2) $AB = A'B' = BC = B'C'$;

» enfin, de l'égalité des angles BAE'' et B'A'E', il résulte AB = AE.
» Donc les dix longueurs contenues dans les égalités (1) et (2) sont
» égales entre elles; mais, dans le parallélogramme ABA'E', on a
» BC = DE'; donc AD = CA', et le parallélogramme ACA'D est
» un losange.

» On en déduit l'égalité des quatre trapèzes; par conséquent la
» figure ne contient que deux sortes de lignes de longueurs diffé-
» rentes; pour suite les triangles ABC, BCD, CDE sont égaux, et
» la figure ABCDE est un pentagone régulier, puisque tous les
» angles sont égaux entre eux ainsi que les côtés (1) ».

Urbano D'Aviso romano in un suo libro intitolato « *Trattato della sfera* », stampato in Roma nell'Anno 1682 (2), ed ivi ristampato nell'anno 1690 (3), e

---

(1) RECREATIONS ‖ MATHÉMATIQUES ‖ PAR ‖ M. EDOUARD LUCAS ‖ II. ‖ ecc.‖ PARIS ‖ ecc. ‖ 1883. ‖ ecc., pag. 202, lin. 1—15, pag. 203, lin. 1—24. — Anteriormente alla pubblicazione del volume secondo delle « *Recreations mathématiques* », il tratto da me riportato, era stato pubblicato nel giornale « MATHESIS ‖ RECUEIL MATHÉMATIQUE, ecc. ‖ PUBLIÉ PAR ‖ P. ‖ MANSION et J. NEUBERG, ecc. ‖ GAND, ecc. ‖ 1883, e precisamente nel fascicolo MARS 1883, a pag. 54, lin. 7—16, e pag. 55, lin. 1—17, e pag. 56, lin. 1—2.

(2) TRATTATO ‖ DELLA ‖ SFERA ‖ E PRATTICHE PER USO DI ESSA ‖ Col modo di fare la figura celeste ‖ opera cavata dalli manoscritti ‖ DEL P. BONAVENTURA CAVALIERI ‖ Lettore Primario delle Mathematiche ‖ nello studio di Bologna ‖ DA URBANO D'AVISO ROM. ‖ E dato in luce con la vita di quello, ‖ e con altri Problemi, Riflessioni filo-‖sofiche, e Prattiche curiose. ‖ *Et in universas Mathematicas disciplinas* ‖ *Dissertatio.* ‖ DEDICATO ‖ *All' Eminentiss. e Reverendiss.* ‖ *Sig. Cardinale* MICHEL ANGELO ‖ RICCI ‖ In Roma, per il Mascardi, 1682. ‖ *Con licenza de' Superiori.* — Si compone di pagine 396, delle quali le prime 24 non numerate, la 25ª, alla 355ª, sono numerate 1—331, la 356ª, alla 374ª, non sono numerate, e la 375ª, alla 396ª, sono numerate 3—24. Le ultime 24 pagine contengono con frontispizio separato lo scritto accennato nel riportato titolo: « *In universas* » *Mathematicas disciplinas Dissertatio.* » L'edizione è pure fregiata del ritratto di Bonaventura Cavalieri inciso in rame.

(3) SFERA ‖ ASTRONOMICA ‖ Del Padre ‖ BONAVENTURA CAVALIERI ‖ Lettore Primario delle Matematiche ‖ nello studio di Bologna. ‖ *Con l'uso della Figura, e prattiche.* ‖ di essa. ‖ Cavate dai Manoscritti dell'Autore ‖ DA URBANO D'AVISO ROM. ‖ *E dato in luce, con la vita di detto* ‖ *Autore, e con altri Problemi.* ‖ *e riflessioni Filosofiche, e* ‖ *Prattiche curiose.* ‖ DEDICATO ‖ All' Illustriss. ed Eccellentiss. Sig. ‖ D. CARLO MARIA ‖ CARAFA BRANCIFORTE ‖ Principe di Botera, della Roccella, e ‖ del Sacro Romano Imperio, e ‖ Grande di Spagna di prima ‖ Classe. ‖ Roma, per il Molo, 1690 ‖ *Con lic. de Sup.* ‖ A spese di Antonio Manari Libraro ‖ alla piazza della Dogana. Si compone di pagine 372, delle quali le prime quattro non numerate, la 5ª, alla 24ª, sono numerate V—XXIV, la 25ª

del quale tengo parola più ampiamente qui sotto, ha indicato, senza però dimostrazione alcuna, il modo di costruire il pentagono, quale risulta dal problema, dal Sig.r Lucas, chiamato « *Le noeud de la cravate* ».

Ecco come scrive il D'Aviso:

« Con l'occasione di questo disegnare » le figure, ti voglio dare il modo di » descrivere e formare mechanicamen- » te un Pentagono, che è una delle più » difficili figure da disegnare, e pure » è la più facile, che si facci in natura, » perchè non è altro, che un semplice » nodo. Prenderai pertanto una striscia » di carta della larghezza, che tu vorrai, » e che habbi li lati paralleli, e con » quella procura di fare un nodo, come » se fosse una corda, avertendo però » che la carta resti sempre stesa nelle » piegature, che stringendola tanto che » resti ben tirata, se tagliarai con le for- » bici li capi che avanzano, hauerai fat- » to un Pentagono giustissimo (1) ».

Il D'Aviso seguita immediatamente, aggiungendo il modo seguente per costruire un esagono:

« Farai anche la figura esagona se » prender ai (*sic*) due striscie di carta di egua- » le larghezza, e con li lati paralleli, e » procurerai di fare con esse un nodo, » facendo che le punte dell' incurvatura, » che hauerai fatta di una striscia, passi- » no per l' aperto dell' incurvatura del- » l' altra, che stringendole adattatamen- » te, e che mantenghino sempre la loro » larghezza, tagliando l' avanzi delle « punte, hauerai fatto un Esagono per- » fettissimo » (2).

La costruzione dell' esagono indicata dal D'Aviso non si riduce ad altro, che a formare il nodo chiamato dagli italiani nodo a *gruppo piano* (3), dai francesi *noeud plat ou marin* (4), e dagli inglesi *loop knot* (5).

Ho attribuito ad Urbano D' Aviso quanto sopra ho riportato dal *Trattato della Sfera*, malgrado che questo libro sia comunemente attribuito al celebre matematico Bonaventura Cavalieri, a cui, sembra, lo attribuisca pure il D'Aviso stesso. — Ho fatto ciò indottovi dalle ragioni che sono per esporre.

---

alla 255ª sono numerate 1—331, la 356ª, alla 372ª, non sono numerate. Inoltre le pagine 367ª, 372ª sono perfettamente bianche. Pure quest'edizione è corredata dell'identico ritratto inciso in rame che figura nella edizione precedente dell'anno 1682.

Veramente questa non può chiamarsi una nuova edizione, perchè la parte composta delle pagine 25ª, alla 372ª è la stessa di quella dell'edizione dell'anno 1682, per cui gli esemplari di questa non sono altro che esemplari di quella, ai quali sono state solamente cambiate le prime 24 pagine ed ommesse le ultime

(1) TRATTATO ‖ DELLA ‖ SFERA ‖ ecc. ‖ In Roma, per il Mascardi 1682 ‖ ecc., pag. 255, lin. 1—17. — SFERA ‖ ASTRONOMICA ‖ Del Padre ‖ BONAVENTURA CAVALIERI ‖ ecc. ‖ ROMA, per il Molo. 1690, ecc., pag. 255, lin. 1—17.

(2) TRATTATO ‖ DELLA ‖ SFERA, ecc. ‖ In Roma, per il Mascardi. 1682. ‖ ecc., pag. 255, lin. 18—29. — SFERA ‖ ASTRONOMICA ‖ Del Padre ‖ BONAVENTURA ‖ CAVALIERI ‖ ecc. ‖ In Roma, per il Molo. 1690, ecc., pag. 255, lin. 18—29.

(3) ISTITUZIONI ‖ DI ARCHITETTURA ‖ STATICA E IDRAULICA ‖ DI ‖ NICOLA CAVALIERI ‖ SAN-BERTOLO ‖ ecc. ‖ VOLUME II. ‖ BOLOGNA ‖ DALLA ‖ TIPOGRAFIA CARDINALI E FRULLI ‖ MDCCCXXVII, pag. 275, lin. 38.

(4) DICTIONNAIRE ‖ UNIVERSEL ET RAISONNÉ ‖ DE MARINE ‖ PAR UNE SOCIÉTÉ ‖ DE SAVANS ET DE MARINS ‖ SOUS LA DIRECTION ‖ DE ‖ A.-S. DE MONTFERRIER, ecc. ‖ PARIS, ecc. ‖ 1841, pag. 491, col. 2, lin. 48—53.

(5) « A ‖ MATHEMATICAL AND PHILOSOPHICAL ‖ DICTIONARY, ecc. ‖ By CHARLES HUTTON, LL. » D. F. R. S., ecc. ‖ VOL. II. ‖ LONDON, ec.c ‖ MDCCXCV » (pag. 5, col. 2, lin. 61—62).

ALLEGATO "H"

URBANO D'AVISO - "Trattato della sfera " - Roma, 1682-

TRATTATO
DELLA
SFERA
CON LE PRATTICHE

Per quelli che desiderano essercitarsi in essa,

E con il modo di fare la Figura Celeste secondo la Via Rationale

DI

VRBANO D'AVISO ROMANO

DEDICATO

All'Eminentiss. e Reuerendiss. Sig. Cardinale

MICHELANGELO RICCI.

In Roma, per il Mascardi, 1682.

Con licenza de' Superiori.

Con l'occasione di questo disegnare le figure, ti voglio dare il modo di descriuere, e formare mechanicamente vn Pentagono, che è vna delle più difficili figure da disegnare, e pure è la più facile, che si facci in natura, perche non è altro, che vn semplice nodo. Prenderai per tanto vna striscia di carta della larghezza, che tu vorrai, e che habbi li lati paralleli, e con quella procura di fare vn nodo, come se fosse vna corda, auertendo però che la carta resti sempre stesa nelle piegature, che stringendola tanto che resti ben tirata, se tagliarai con le forbici li capi che auanzano, hauerai fatto vn Pentagono giustissimo:

Farai anco la figura Esagona se prenderai due strisce di carta di eguale larghezza, e con li lati paralleli, e procurarai di fare con esse vn nodo, facendo che le punte dell'incuruatura, che hauerai fatta di vna striscia, passino per l'aperto dell'incuruatura dell'altra, che stringendole adattatamente, e che mantenghino sempre la loro larghezza, tagliando l'auanzi delle punte, hauerai fatto vn Esagono perfettissimo.

MO.

ALLEGATO "I"

Pietro Riccardi - Biblioteca Matematica Italiana
dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX
Aggiunte, VI, col. 190 (Modena, 1893)

DAVISI (o D'Aviso) *Urbano*.

Non è qui luogo opportuno a discutere gli argomenti in base ai quali il chiarissimo mio amico e collega prof. Antonio Favaro qualificava ingiusti (1) gli apprezzamenti con cui, al seguito della opinione di valentissimi cultori della storia scientifica, diedi ragguaglio della pubblicazione fatta dal D'Aviso, di uno dei trattati della Sfera attribuiti al Galilei. Io esposi il mio avviso, e non ebbi certo la pretensione di sentenziare, come erroneamente mi attribuisce il Favaro.

Se non che i mss. di codesti trattati non apparendo autografi; nè il Favaro avendo chiarito se siano o no fra loro uguali, mi permisi e mi permetto fino a prova più positiva, di ritenerli apocrifi, od al più compilazioni fatte con parecchie interpolazioni e con iscarso discernimento da taluni de' discepoli del Galilei, anzichè integralmente copiati da suoi mss., o da lui dettati. Imperocchè se è assai verosimile che il Galilei spiegasse ai suoi privati uditori i principi della sfera secondo l'apparente stabilità della Terra, è altrettanto improbabile che egli dedicasse un capitolo di un suo trattato a confutare con i più volgari argomenti la base di quel sistema copernicano che, come afferma anche il Favaro (2), era stato abbracciato dal Galilei anteriormente al 1597 (3).

Del resto la pubblicazione del D'Aviso, anche se fatta in buona fede, non lo scuserebbe della inopportunità e della poca convenienza di pubblicare un preteso scritto giovanile del Galilei in manifesta contraddizione alla di lui opinione più maturata, notoriamente a suo onore professata ed a suo danno propugnata.

In ordine poi all'asserzione che l'esimio prof. Iacoli abbia giustificato il D'Aviso dall'altra imputazione datagli di avere pubblicato sotto il proprio nome un lavoro del Cavalieri, giova avvertire in primo luogo che la diversa conclusione cui giunge il prof. Iacoli, è in forma alquanto dubitativa (4); ed in secondo luogo che, a parte la scusante allegata della modestia (la quale non saprei come invocare a favore di chi pubblica cose proprie sotto l'altrui nome), il far ciò, come dice lo stesso prof. Iacoli, *per assicurare al libro una maggiore autorità ed un miglior successo*, in termine comune si chiama impostura.

(1) Nuovi studi Galileiani per A. Favaro. *Venezia*, 1891, p. 61.

(2) Cronologia Galileiana per A. Favaro. *Padova*, 1892, p. 10.

(3) Se quel capitolo del trattato della sfera appartenesse al Galilei, metterei pegno che fosse una canzonatura dei peripatetici. Par di leggere nei primi periodi le argomentazioni che il Manzoni mette in bocca a D. Ferrante per dimostrare che la peste non esisteva.

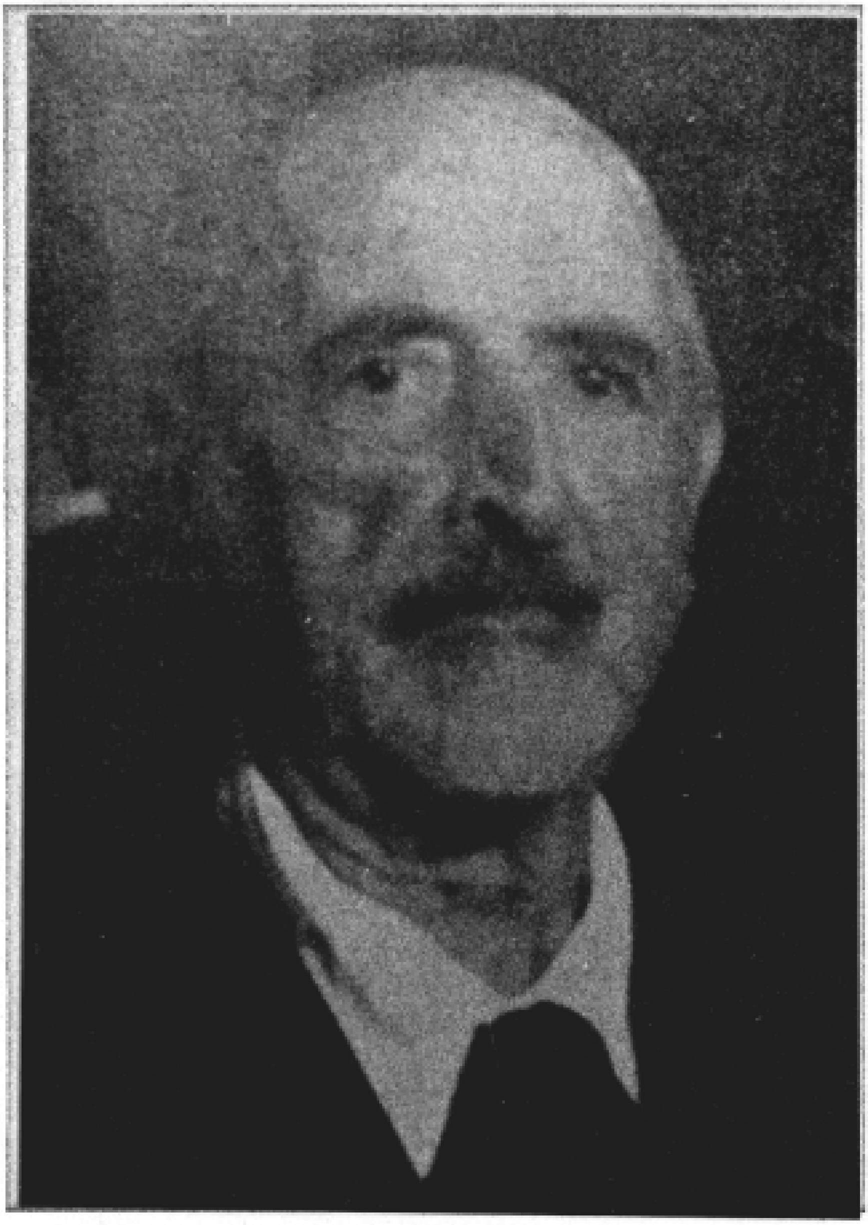
(4) Il prof. Iacoli (Intorno al problema « Le noeud de cravate » Roma, 1884, p. 14) conclude: « Mi sembra che non sia lungi dal vero l'asserire che il *Trattato della sfera*, di cui ho tenuta parola, appartiene al D'Aviso e non al Cavalieri ».

Il Favaro invece (Nuovi studj galileiani ec. p. 61) afferma che il D'Aviso dichiara *lealmente* di averlo tratto dai manoscritti del Cavalieri.

Perciò egli prima d'invocare contro di me la rispettabile autorità del prof. Iacoli, vegga di porsi in accordo con lui.

ALLEGATO "L"

Annuario dell'Università di Roma
1954-55, pag. 573



GIOVANNI VACCA

Il 6 gennaio 1953, in età di 81 anni, si è spento improvvisamente a Roma il prof. Giovanni Vacca. Sino all'ultimo egli aveva conservato pienissima lucidità di mente, dedicandosi alle sue predilette ricerche sinologiche e seguitando a curare i corsi di lingue orientali dell'Istituto Italiano per il Medio ed Estremo Oriente, dei quali era appassionato e intelligente direttore. Con lui è scomparsa una bella figura di scienziato e di umanista; un oumo che sapeva riunire, cosa rara ai giorni nostri, le qualità necessarie al rigore della ricerca matematica a quelle essenziali dello storico e del filologo. Sopratutto per questa versatilità, indice di una ricca personalità, e per il suo senso umano di vedere le cose del mondo, il Suo ricordo è ancora vivissimo in quanti lo conobbero.

Nato a Genova il 18 novembre 1872, Giovanni Vacca si laureò in matematica nel 1897, dedicandosi subito dopo a fruttuose ricerche nel campo del calcolo infinitesimale quale assistente di G. Peano all'Università di Torino.

La passione per le scienze esatte non limitava però la cerchia dei suoi interessi e delle sue curiosità. Mente ricca di un ben sicuro e profondo senso storico, si dedicò a ricerche sulla storia della matematica, disciplina questa che non abbandonò mai portandovi fino ai Suoi ultimi anni notevolissimi contributi. Dopo una breve parentesi politica che lo vide dal 1902 al 1904 consigliere comunale di Genova e membro della direzione nazionale del Partito Socialista, Egli intensificò il Suo lavoro scientifico, trovando proprio nel campo di studi di storia della matematica (la curiosità che il Leibniz provò per la civiltà cinese) la prima spinta verso la sinologia. Facilitato da una memoria prodigiosa, egli sormontò facilmente le difficoltà derivanti dall'aver iniziato relativamente tardi nella vita lo studio di quella difficile lingua, e nel 1907-08 egli intraprese un lungo viaggio, durato oltre un anno, nel Szechwan. Questo viaggio rimase per Lui una miniera inesauribile di conoscenze e di impressioni, ed Egli soleva spesso trarre dai Suoi ricordi vivide descrizioni di ambiente e di costumi. Egli era del resto uno degli ultimi sinologi viventi che avesse conosciuta la vecchia Cina dei Ch'ing, la millenaria Cina confuciana non ancora tocca dai rivolgimenti che dovevano sconvolgere la sua antica civiltà; tanto più che egli non aveva soggiornato negli ambienti europei della capitale, ma in una grande città di provincia, Ch'êng-tu, dove la vita era ancora quasi scevra di ogni influenza occidentale. Frutto di questo viaggio furono alcuni articoli di divulgazione, e sopratutto stretti legami di amicizia con alti esponenti della cultura cinese. Ricorderò tra questi il grande geologo Ting Wên-chang, che poi rimase amico fraterno del Vacca fino alla sua morte.

Al suo ritorno in Italia Giovanni Vacca spostò la sua attività con assoluta prevalenza al campo sinologico ed affrontò la carriera universitaria. Nel 1910 conseguì la libera docenza in Lingua e letteratura cinese. L'anno seguente egli era incaricato di Storia e Geografia dell'Asia Orientale all'Università di Roma. Ebbe così inizio la Sua opera di maestro; e tra i Suoi allievi basti ricordare A. Castellani, e più tardi G. Tucci. Come Direttore della biblioteca della Facoltà di Lettere. Egli cercò di ampliare il patrimonio bibliografico italiano nel campo degli studi orientali. Bibliofilo Egli stesso, cercò di costituire dei nuclei di opere essenziali, acquistando, ottenendo doni, organizzando scambi, ottenendo mezzi finanziari straordinari per colmare le lacune più gravi, cercando sempre di indurre le biblioteche romane a dare il posto necessario alle pubblicazioni orientali ed agli studi orientalistici. Ed anche di quest'opera silenziosa e poco appariscente, che diede agli studiosi almeno alcuni dei principali sussidi agli studi orientali, bisogna esserGli grati.

Nel 1922 i Suoi meriti scientifici vennero riconosciuti con la nomina senza concorso a professore ordinario di Storia e Geografia dell'Asia Orientale nella Università di Firenze, succedendo a Carlo Puini di cui era stato allievo e collaboratore. Un anno dopo Egli veniva chiamato alla stessa cattedra all'Università di Roma, dove insegnò finchè nel 1948, avendo raggiunto i limiti d'età, fu collocato a riposo con il titolo di professore emerito. Furono venticinque anni di serena, fattiva, proficua attività didattica. Quanti ebbero occasione di studiare con Lui o di rivolgersi a Lui per consiglio, ne ricordano la cortesia, la umana comprensione, il vivo interessamento per le ricerche dei suoi allievi, la generosità nel renderli partecipi della sua mirabile vastissima conoscenza bibliografica. Con Lui è scomparso non solo un maestro, ma un uomo che, educato profondamente nella più pura tradizione occidentale, seppe trovare nella civiltà dell'Oriente un punto di contatto con i suoi ideali, e pur restando fedele alla civiltà di cui faceva parte, riuscì a liberarsi dei pregiudizi e dei preconcetti su un mondo poco conosciuto e che Egli contribuì a far meglio conoscere.

LUCIANO PETECH