Parafrasi in verso libero
de

“Fullereni, simmetrie e colorazioni”

di Andrea Moiola
(che spero non si arrabbi per una “traduzione” matematicamente irriverente)

a cura di
Carminati Alberto

Nota del traduttore:
parlare di matematica è cosa seria, e soprattutto il linguaggio, la pignoleria nell'uso dello stesso, la maniacale attenzione ai dettagli raggiungono necessariamente vette di perfezionismo che conferiscono al matematico un'aura mediamente spocchiosa. Ma non fatecene una colpa (sono quasi matematico anche io), noi vorremmo fare diversamente, ma ci disegnano così...
Quindi per una volta prendo commiato dalle maledette restrizioni e dalle ansie della definizione, e mi accingo a descrivere il contenuto di una tesina. Userò per quanto possibile immagini, metafore e concisi riassunti (qualcosa come blablabla), laddove il contenuto eccessivamente tecnico potrebbe allontanare il lettore non matematico. Beato lui...

P.S. Ma non finisce qui! Lavorando lavorando, Andrea Moiola ha reso disponibile un altro file che vuole riassumere in un'ottica diversa le ricadute più concrete (termine da prendere sempre con le molle) della propria tesina, quindi mi raccomando, andate a sbirciare anche là per maggiori illustrazioni e delucidazioni. La presente “traduzione” è stata scritta di getto al ricevimento della tesina, e aggiornata poi con dinamiche geologiche, il che ovviamente garantisce che i richiami al successivo file di Andrea siano poco frequenti. Sarà premura del lettore attento il consultare contemporaneamente, o quasi, tutta la documentazione.

INTRODUZIONE

Ok, l'introduzione è d'obbligo: di che si parla nella tesina? In soldoni, vengono analizzate le strutture intime e insospettabili di alcune figure geometriche tridimensionali, e in particolare vengono presentate molte proprietà algebriche-combinatorie che individuano quelle che al comune uomo della strada sono le varie maniere di “colorare” questi oggetti.
Siccome per questa elaborazione leggera mi appoggerò il più possibile alla tesina, andatevi a leggere l'introduzione della medesima, che forse è l'unica parte comprensibile ai più. Ci sono accenni a cose tecniche che però non sono esclusivissime della matematica, e forse persone di preparazione scientifica non si spaventano di fronte a gruppi cristallografici, simmetrie tetraedrali chirali e altro, ma ora come ora aspettiamo prima di lanciarci in discorsoni, e partiamo insieme al nostro autore.

CAPITOLO I

Definizioni e notazione

Il paradiso di ogni matematico: stabilire i termini nei dettagli prima di cominciare a discutere. Non è lavoro facile, e un tratto fondamentale è l'accettazione di convenzioni che non approfondiscono alcuni aspetti che ci si aspetterebbe di veder approfonditi, e alle volte anzi sembrano andare contro al senso comune. Pazienza, cominciamo col dire che, se prendete un foglio, segnate su di esso dei pallini, li etichettate scrivendoci vicino un numero, e poi ne unite alcuni con un tratto di matita (un segmento), quello che ottenete è *un grafo*. Quindi:

- se il mio grafo ha, ad esempio, sette punti, che sono detti *nodi*, allora posso numerare questi punti ottenendo un insieme $V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$
- se desidero unire, che so?, il primo nodo e il quinti, allora traccio un segmento tra il puntino con vicino un 1, e il puntino accanto al 5. Posso chiamare questo segmento, che si definisce solitamente *arco*, con una notazione del tipo $(1,5)$. Quindi posso mettere tutti i miei archi in un insieme, qui e anche altrove denominato con la lettera E, che ovviamente sarà un insieme di coppie (n, m), dove n ed m sono dei numeri corrispondenti a nodi. Tutta sta trafila in matematichese si dice semplicemente *E è contenuto in nel prodotto cartesiano di V per se stesso*. Lascio al lettore giudicare quanto questo corrisponda a "semplicemente". I grafi utilizzati inoltre saranno *non orientati*, ossia l'arco usato come esempio si può chiamare indifferentemente (1, 5) e (5, 1), e non saranno ammessi self loop, insomma nessun arco parte e arriva nello stesso nodo, ossia in ultimo niente archi del tipo (n, n).

Ok, abbiamo definito un grafo. Nella tesina viene anticipato l'uso di grafi particolari, detti "tracciati su una superficie".

*APRIAMO UNA PARENTESI:*Un grafo di questo genere in alcuni casi si dice *planare*, anche se effettivamente l'uso che si farà nel lavoro rende meno coerente il termine. Per quanto ci riguarda, un grafo planare è un grafo che si può disegnare su un foglio in modo che nessun arco ne intersechi un altro. Provando a disegnare grafi un po' a caso, potreste cominciare con archi che si intersecano, ma questo non significa che il grafo non sia planare. Immaginate di poter spostare i nodi in modo che gli archi li seguano: in alcuni casi troverete una disposizione di nodi nella quale gli archi non si intersecano (prima abbiamo parlato di segmenti, ma anche immaginare questi archi come elementi flessibili, ad esempio delle cordicelle, va benissimo. Tempo fa su internet c'era un giochino che consisteva nel tracciare un grafo planare che unisse un certo insieme di nodi, peccato però che l'insieme fosse stato scelto in modo da rendere la cosa impossibile. Con qualche amico ci siamo accorti del trucco, e questo ha reso ancor più spassosi alcuni interventi sul forum collegato al gioco, che vantavano di aver risolto il problema).

Una bella cosa di grafi simili, è che possono essere *grafi di Schlegel* di un poliedro. Senza impazzire, diciamo che prendendo gli archi come segmenti rigidi, e muovendoli in tre dimensioni, possiamo costruire un poliedro che abbia i nodi come vertici e gli archi come spigoli. Questo è vero per tutti i poliedri semplicemente connessi (tutti i platonici e gli archimedei, e molti altri, ad esempio una grande parte dei fullereni per come sono stati definiti a questo punto. Un fullerene, ossia un poliedro con facce esagonali e pentagonali, che non ammette un grafo di Schlegel planare, è la ciambellona ottenuta coi moduli Phizz: se cerchiamo di disegnarne il grafo di Schlegel su un piano, avremo sempre delle intersezioni tra archi diversi. Se usiamo altre superfici, ossia la sfera, il piano proiettivo eccetera, il discorso cambia). Questa parentesi forse chiarisce la facilità con cui un matematico descrive una figura tridimensionale, il poliedro ad esempio, riducendola ai suoi elementi minimi, vertici spigoli e facce. Un dettaglio: i grafi come vengono usati nella tesina non sono *grafi di Schlegel*, almeno non necessariamente.

Ok, riprendiamo la tesina: si nomina la relazione di Eulero, formuletta divertente e facile da verificare:

Numero di Vertici + Numero di Spigoli + Numero di Facce = Costante

provare per credere. Costante in che senso? Beh, nel senso che ci sono intere famiglie di poliedri che condividono la stessa costante: tutti i solidi platonici e archimedei hanno costante pari a 2, il toro e in generale i solidi con un “buco” hanno costante nulla. La costante può essere calcolata come *2 per (1 – Numero di Buchi)*, anche se si deve diffidare del concetto di “buco”, che è più difficile di quanto si possa immaginare; ci sono figure con mezzo buco, ad esempio, e somigliano fondamentalmente a dei nodi. Comunque, con questi chiarimenti preliminari, come capire esattamente il rapporto con le superfici che vengono nominate nella tesina? Presto detto: prendete una sfera, metteteci dentro un cubo costituito dal solo scheletro, un modello origami open frame, se volete. E per concludere, infilate una lampadina nel cubo, accendete, e... riuscite a immaginare l'ombra sulla superficie interna della sfera? Et voilà, ecco il grafo che cercavate, una serie di linee che si incontrano in alcuni punti. Per la sfera quindi un'idea pratica c'è. Per il toro, beh, dovrete infilare il solido di interesse come in una cappelliera col buco, e immaginare di illuminarlo tutto dall'interno. Per il piano proiettivo e la bottiglia di Klein... ne riparleremo.

A questo punto, seguono definizioni di terminologia adatta alla teoria dei grafi. Se ad ogni spigolo/arco possiamo assegnare un'etichetta, e tale possiamo considerare un colore o un numero, allora possiamo anche cominciare a definire le proprietà delle possibili colorazioni. Possiamo chiederci ad esempio se non sia possibile colorare un grafo (e quindi un poliedro), o meglio gli archi di un grafo, facendo in modo che in ogni vertice concorrano archi di colori tutti diversi. O anche tutti uguali, perché no? Solo che una simile richiesta sarebbe banalmente soddisfatta usando sempre lo stesso colore. Quindi, tra tutte le possibili richieste, imporremo quella degli spigoli tutti diversamente colorati in ogni vertice. Se usiamo n colori, un simile capolavoro di pittura sarà detto *n-colorazione*. Ancora una volta, è interessante trovare un caso particolare tra quelli possibili, ossia quello con meno colori. Ma, pensando agli origami, sarebbe possibile chiedere una colorazione con valore pari al numero di colori che vogliamo usare, per motivi puramente estetici; il resto della tesina cerca n-colorazioni che siano anche simmetriche, quindi dosando gli elementi del ragionamento, potremmo cercare colorazioni ad hoc. In teoria.

Qui viene anche accennato un risultato interessante, ossia che ci sono due sole possibilità, con i grafi scelti: cerchiamo il nodo/vertice nel quale confluiscono più archi/nodi, e supponiamo che tale numero sia R. Allora, il grafo ammette, come colorazione minima (*indice cromatico*), una R-colorazione oppure un (R+1)-colorazione.

Segue un discorsetto simpatico sulle proprietà computazionali di algoritmi usati per trattare il problema, altrimenti detto “quanto ci ha messo il mio pc a trovare le colorazioni cercate provandole tutte”. Il succo è che il problema è difficile, trattabile per poliedri piccini ma decisamente inarrivabile per strutture più grandi. Diciamo che con oggetti nemmeno troppo incredibili, si potrebbe far inceppare un cervellone di quelli che giocano a scacchi con i più grandi maestri e altre fantasie da fantascienza del genere. Questa volta però è vero, quindi molto più divertente. Ci sono anche accenni ad automorfismi e compagnia bella. Non dico di ignorarli del tutto, ma per ora è meglio puntare soprattutto a liberarci della soggezione che possono suscitare: se io ho un insieme, e definisco una regola che associ un suo elemento ad un altro elemento, in modo chiaro e stabilito, senza sovrapposizioni e intrecci strani, ho un *automorfismo*. Con un esempio molto utile e credo piuttosto facile da afferrare:

prendete un triangolo equilatero, con un lato disposto orizzontalmente in basso e un vertice verso l'alto. Date un nome ai vertici, ad esempio A, B e C partendo dall'alto e in senso orario. Fissate il centro del triangolo (incentro, circocentro, ortocentro coincidono tutti. Semplicemente, il centro), e immaginate di poterlo ruotare, poniamo sempre in senso orario. Ruotate di 120°: il vertice A si troverà su B, B su C, C su A. Questa rotazione quindi identifica in modo preciso una relazione tra l'insieme {A, B, C} e se stesso: A verrà mandato (ossia messo in relazione) con B, B con C e C con A, e non avremo casi antipatici di sovrapposizione, del tipo sia A che B finiscono in C, oppure A finisce in B oppure in C in modo non determinato.

Questo esempio da me aggiunto è interessante perché rivela già il modo tipicamente matematico di intendere e studiare le simmetrie. Se ci si pensa un attimo, dopo tre giri, ossia dopo tre applicazioni dell'automorfismo appena descritto tramite l'esempio geometrico di rotazione, avremo nuovamente il triangolo iniziale, con A, B e C al loro posto di partenza. Questo introduce il concetto di ordine, o caratteristica, di alcuni oggetti, siano essi insiemi o funzioni. Questa rotazione viene citata più avanti come *gruppo ciclico di ordine 3*, rappresentato con la notazione C_3.

La tesina sostanzialmente va alla ricerca di automorfismi contenuti in due insiemi , chiamati G_p e G_c, che, detta così alla buona, rispettivamente scambiano o oppure lasciano invariati i colori dell'oggetto al quale li applichiamo. Se dopo aver letto tutto (anche un paio di volte) tornerete qui, vi prometto che quest'ultima affermazione avrà molto più senso.

1.1 Le colorazioni dei poligoni

Ok, e se vedessimo prima tutta la storia in due dimensioni? Pensiamo di lavorare non con poliedri ma con poligoni, e solamente con pentagoni ed esagoni, messi su un piano (che nel discorso della tesina significa su “superfici orientabili” come la sfera o il toro, ma non pensiamoci troppo che ci si guadagna solo una perdita di sonno). Quindi abbiamo un grafo con cinque o sei nodi, uniti tra di loro da cinque o sei archi, a formare un ciclo. Insomma prendete un foglio e disegnateci su un pentagono. Cominciate ad assegnare dei colori, o dei numeri, ad ogni arco, in modo che in nessun nodo arrivino due archi con la stessa etichetta. Procediamo con ordine: cominciate da un lato del pentagono e muovetevi in senso orario, assegnando un colore nuovo solo quando è assolutamente necessario, ossia poniamo di aver colorato il primo lato di rosso. Il secondo lato, essendo consecutivo al primo (parte da dove il primo finisce, quindi hanno un nodo/estremo in comune, quindi devono avere colori diversi), lo coloriamo diversamente, magari di blu. Il terzo lato potrà essere nuovamente rosso, non potendo essere blu ma non essendo collegato al primo rosso. Ovviamente, avrei potuto introdurre ancora un altro colore, ma il gioco era di usarne meno possibile, ricordate?. Andiamo avanti e mettiamo il blu sul quarto lato. E qui vediamo come il quinto lato abbia un nodo condiviso col primo, rosso, e col quarto, blu. E quindi siamo obbligati ad usare un terzo colore, diciamo giallo. Se invece dei colori usiamo i numeri da uno a tre, vediamo che con vari tentativi troviamo le famiglie riassunte dalla tabellina. Ora, se ogni colore ha una dignità tutta sua, possiamo dire che rosso-blu-rosso-blu-giallo è diversa da blu-rosso-blu-rosso-giallo, e se anche la posizione è importante, rosso-blu-rosso-blu-giallo è diversa da rosso-blu-giallo-rosso-blu. Ci sono casi in cui simili studi non sono basati sui singoli colori e sulle posizioni, guardano solo se sono o meno diversi tra loro, e quindi le combinazioni sono molte meno (al lotto ad esempio non conta l'ordine in cui giochiamo i numeri, questo non toglie che le combinazioni siano talmente tante che giocare e non giocare sono due atteggiamenti che condividono probabilità di vittoria numericamente simili. Insomma, non ho mai giocato una volta in vita mia e ho vinto gli stessi soldi vinti da una mia certa zia che gioca una volta a settimana da decenni. Ma non divaghiamo).

Nel nostro caso invece i colori e la posizione contano, e questo spiega le famiglie riassunte nella tabellina a pagina sei, ampiamente illustrate alla pagina sei del secondo file di Andrea Moiola, dove vi consiglio di andare immediatamente a mettere il naso. Facciamo lo stesso gioco con gli esagoni (notare come un poligono a lati dispari richieda più colori di uno a lati pari anche se più grande, perchè nel caso pari si possono alternare perfettamente i due colori), e otteniamo un'altra tabellina. Alla fine, facciamo il gioco sugli esagoni appoggiandoli però sul lato di un pentagono scelto tra quelli della prima tabellina, sempre usando gli stessi colori e sempre tirando al risparmio: ci sono già dei risultati apprezzabili nella colorazione dei fullereni, dove appunto esagono e pentagoni stanno gomito a gomito. Se ci si prende gusto, è possibile espandere da qui il ragionamento, per ottenere risultati equivalenti a quelli della tesina in modo costruttivo e un po' per tentativi. Garanzie di trovare tutte le possibilità non ce ne sono, e comunque è un lavoro proibitivo, oltre che matematicamente poco elegante.

1.2 Notazione per i gruppi algebrici

Qui riporta alcune notazioni per gruppi algebrici noti, che possono spesso facilmente essere pensati come situazioni analoghe all'esempio fatto sopra della rotazione del triangolo, anche se prendendo a riferimento geometrie tridimensionali, tipo tetraedri e ottaedri, si comincia a fare fatica. I casi combinatori del genere spicciolo, tipo le permutazioni di tot elementi come S_n, si possono ricostruire con piccolo sforzo: se ho n oggetti, ad esempio i numeri da 1 a n, in quanti modi diversi posso ordinarli, senza ripeterli? La prima volta posso scegliere tra n numeri, poi, levato il primo numero, posso fare n-1 scelte. Quindi al secondo passo potevo aver fatto n per n-1 scelte diverse. E così via, si ottiene n per n-1 per n-2 per n-3, fino ad ottenere un prodotto particolare che in matematica è detto fattoriale, ed è indicato dal numero più alto seguito da un punto esclamativo: n*!*, appunto.

CAPITOLO II

I fullereni planari

Magnifico, ecco cosa succede a scrivere a braccio. Ricordate la parentesi aperta nell'introduzione del capitolo primo, ossia quello contenente definizioni e notazioni? Ecco, qui si dichiara l'intento di concentrarsi sui grafi planari, che corrispondono a poliedri “proiettabili” sulla superficie sferica (la storia del cubo a lanternino...).

Comunque sia, il capitolo intende descrivere alcune costruzioni di *n-colorazioni* per *fullereni planari* (proiettabili su una sfera) [ammazza quanto si diventa pedanti a fare matematica, n.d.A.], in particolare si identificherà come massimamente simmetrica la colorazione a simmetria *tetraedrale chirale* chiamata semplicemente *T*. Per ora prendiamo come stupefacente e meravigliosa la cosa anche solo per come suona bene, poi vedremo che significa. E ricordiamo che si vorrà dimostrare l'esistenza di 3-colorazioni per i fullereni planari, il che non è poi tanto male, considerando i discorsi fatti poco sopra sulle colorazioni per i poligoni: considerate di cominciare da un pentagono circondato da esagoni del vostro fullerene, poi scegliete una delle simmetrie possibile per gli esagoni intorno, poi continuate a colorare il tutto, sempre tentando di tenere al minimo il numero di colori. Non è per nulla scontato che bastino quei tre usati già in principio sul pentagono. Inoltre, il tutto parrebbe equivalere al teorema dei quattro colori, davvero niente male. Non sapete cos'è il teorema dei quattro colori? No? Proprio niente del tutto? Ignorantoni, non si vive di solo Dante, accidenti alle scuole italiane! (*Teorema dei quattro colori: prendete una bella cartina geografica, dividetela in regioni a vostro piacere, incuneate tra loro, storte, brutte e di foggia aliena, purchè siano regioni, ossia zone “recintate” da un tratto continuo che non interseca altri tratti. E il tutto sulla cartina, che naturalmente consideriamo piatta. Ecco, non importa quanto la vostra ripartizione territoriale si avvicina ad un picasso, serviranno sempre al più quattro colori diversi per dipingere il tutto senza avere regioni confinanti dello stesso colore*). Ok, per l'introduzione mi sembra anche più di quel che sarebbe lecito sbrodolare... Ah no, c'è il teorema. Ebbene:

Ogni fullerene planare è tre colorabile per spigoli.

Si, ok, è esattamente quanto si diceva sopra. Magari non è la cosa più facile del mondo, ma proverò a spiegare in modo chiaro come mai questo teorema discenda direttamente da quello dei quattro colori [ricorriamo ora ad un'indentazione audace, che permetterà ai più pigrotti di saltare a piedi pari tutta la dimostrazione, e permetterà ai più tenaci di tornare a misurare i progressi delle proprie celluline grigie, n.d.A.].

> Allora, consideriamo il grafo del fullerene planare, ottenuto sulla sfera illuminando dall'interno un fullerene contenuto nella sfera. Come avevo accennato nella nota all'introduzione, questo grafo può essere riportato su un piano; il gioco è facile, eliminando una faccia e usando la proiezione stereografica (più concretamente: consideriamo il caso facile di un cubo, sempre costruito con il solo scheletro degli spigoli uniti sui vertici, e immaginiamo di poter allungare questo spigoli, ruotarli, eccetera. Prendiamo la faccia ovviamente quadrata sulla quale poggia il cubo, e ingrandiamola: otterremo una piramide retta, a base quadrata, tronca. Ora, schiacciamo tutto, in modo che la faccia superiore, più piccola, si trovi sullo stesso piano della inferiore, più grande. In questo modo avremo una figura data da un quadrato, con dentro un quadrato, e con i vertici dei due quadrati uniti a due a due da segmenti. Ecco il grafo di Schlegel del cubo! Non è nemmeno troppo lontano dalle rappresentazioni tridimensionali dei cubi a quattro dimensioni, se

vogliamo divagare un po', che fa sempre bene, divagare).

Il succo, è che questo grafo di Schlegel è un grafo planare, ossia una suddivisione del piano in regioni *connesse* (banalmente, diciamo che ogni regione è una porzione integra, senza buchi e con contorni chiusi e ben definiti, dello spazio). Quindi è come la cartina geografica della quale dicevamo sopra. E quindi, poiché il teorema dei quattro colori sulle cartine vale, eccome se vale, questo grafo di Schlegel può essere colorato con soli quattro colori, ha cioè una 4-colorazione. Ma un matematico non ha nessun gusto a chiamare questi quattro giallo, rosso, verde e blu, noooo. Li chiamerà *(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)*. Perché mai? Beh, questi sono i quattro elementi risultanti dal prodotto $C_2 x C_2$, dove i C_2 sono gruppi ciclici di ordine due, roba già citata (l'esempio del triangolo era ciclico di ordine tre). Quale che sia il motivo profondo, questo trucchetto è del tutto lecito, in fondo giallo, rosso, verde e blu sono solo dei nomi, e chiamare Marco, Matteo, Luca e Giovanni le regioni sarebbe stato altrettanto lecito (spero di non offendere la sensibilità religiosa di qualcuno). Però però, qui sta il trucco strisciante: coloriamo gli spigoli guardando un po' che tipo di regioni dividono, ossia stabiliamo una regola che dica, ad esempio, "se lo spigolo divide una regione gialla da una rossa, allora deve essere blu". Con i "nomi" scelti poco fa, per avere il colore risultante dalla combinazione delle regioni adiacenti, basterà moltiplicare tra loro i due colori (con regole standard per i prodotti cartesiani, ossia per insiemi quali $C_2 x C_2$, che ovviamente a un matematico vengono facili e giustificano la scelta apparentemente bizzarra dei "colori". Le regole standard non sono difficili in sé, ma preferisco non delucidarle qui, altrimenti dovrei mettermi a spiegare pure i gruppi ciclici che precedentemente avevo deciso di passare così superficialmente).

Uh, che lunga sta introduzione... come va a finire? Beh, va a finire che, sempre a causa di ste regolette, i risultati possibili sono non più quattro, come i colori delle regioni, ma solo tre. E siccome in ogni vertice del nostro grafo (poliedri usati sono *3-regolari*, come definiti all'inizio della tesina) giungono tre regioni di colori diversi, che formano tre coppie di colori diverse, abbinate a tre spigoli diversi, i colori degli spigoli saranno diversi. Tortuoso ma credo completo, come discorso.

Quindi, a farla breve, se il grafo planare (come in effetti è) è 4-colorabile per quanto riguarda le facce, allora è 3-colorabile per quanto riguarda gli spigoli.

Torniamo un attimino sulla terra, anche se per poco, e vediamo di stabilire una ulteriore semplificazione del nostro studio (i matematici sono i più bravi a semplificarsi il lavoro, buttano via un mucchio di roba prima di darci sotto davvero. Nonostante questo, quel poco che sopravvive alle impietose introduzioni a colpi d'accetta, è sempre complicatuccio): ci interessano solo i fullereni con simmetria simile a quella del dodecaedro, ossia I oppure I_h. In sostanza, i fullereni che hanno dodici facce pentagonali che possono essere messe, a livello del grafo proiettato sulla sfera, nelle stesse posizioni delle facce di un dodecaedro. Queste figure, dette buckyballs o fullereni sferici, ma ne ho sentite di tutti i colori anche facendo la mia tesi, differiscono per le facce esagonali, in quanto a numero e disposizione. La differenza tra il caso I e il caso I_h è data dall'essere o meno una *simmetria chirale*. Come spiegarlo facilmente? Beh, considerato i pezzi del tetris: normalmente si possono ruotare, ma cosa succede se ne faccio la riflessione? In alcuni casi, riflettendo trovo una disposizione del pezzo che potrei ottenere anche solo ruotando, ad esempio col quadrato 2x2, con il pezzo lungo 1x4, con il pezzo formato da un rettangolo 1x3 al quale, nel centro su un alto, attacchiamo un altro quadratino 1x1 (giustamente mi suggeriscono... il pezzo a T!). Queste sono figure *achirali*. Se pensiamo invece ai pezzi a forma di elle, notiamo che riflettendone uno trovo l'altro, pertanto questi possono vedersi come pezzo "sinistro" e pezzo "destro", e stiamo parlando quindi di figure a simmetria *chirale*. Nel fare origami modulari, ci si può accorgere che molti moduli sono chirali, ossia se, al sessantesimo modulo che pieghiamo, seguiamo le istruzioni alla rovescia, ci troviamo un modulo che non si incastrerà mai. Alle volte però la differenza è così sfuggente che ci mettiamo anche un po' ad accorgercene, accidenti ai moduli destri e sinistri.

2.1 La costruzione di Goldberg-Coexter dei fullereni sferici

Ok, qui viene introdotta una procedura per costruire questi benedetti fullereni sferici. Il giochino, a partire dalla tassellazione di triangoli equilateri, mi sembra abbordabile da chiunque e ben descritto, e le figure che lo accompagnano chiare. La notazione $GC_{k,l}$ magari non è la più bella del mondo, ma ha la sua utilità. Nei fullereni che possiamo costruire a questa maniera, i casi chirali si distinguono facilmente da quelli achirali: gli achirali hanno $l=0$ oppure $k=l$.

Cosa abbiamo fatto in questo paragrafo? Per ora, abbiamo solo descritto una procedura per costruire fullereni sferici.

Chi ci dice che quelli così realizzabili sono tutti i fullereni sferici esistenti? Beh, ce lo dice il teorema 2.2, attribuito a Goldberg. Quindi, tutti i fullereni sferici possono essere descritti e studiati tramite la notazione $GC_{k,l}$ e la costruzione dell'icosaedro con i triangolini equilateri serigrafati. Certo, non è proprio proprio un fullerene, questo solido ottenuto, ma se prendiamo il suo duale...

Costruire il duale è facile, almeno se ci accontentiamo di questo duale qua, validissimo su poliedri a simmetria sferica. Al solito, esempio facile: considerate il cubo: ogni vertice deve diventare una faccia, che ha tanti lati quanti erano gli spigoli uscenti dal vertice. E ogni faccia deve diventare un vertice, al quale giungono tanti spigoli quanti lati aveva la faccia. Quindi il duale del cubo è, non a caso, l'ottaedro. Il duale dell'icosaedro è il dodecaedro, e, caso interessante, il duale del tetraedro è sempre il tetraedro.

2.2 Classificazione delle colorazioni invarianti

Riprendiamo la stesura dopo qualche giorno di pausa, sperando di non aver dimenticato tutto producendomi così in grandiose quanto inutili ripetizioni. Il presente paragrafino che introduce la sezione 2.2 riassume sostanzialmente il resto del capitolo. Comodo, no? Ovviamente al matematico restano le dimostrazioni, i teoremi eccetera, non è che nel resto del corposo capitolo siano state scritte barzellette o altre amenità solo per fare volume.

In pratica, si ricorda che i pentagoni, comunque siano colorati seguendo la "regola del risparmio", richiedono tre colori, con uno spigolo solo del terzo colore. Questo è lo spigolo spaiato che permette di confrontare tutte le simmetrie contenute nel dodecaedro mentre lo coloriamo. Chiedendosi quali simmetrie rispettino la presenza dello spigolo spaiato si può allora ridurre di molto l'insieme di simmetrie possibili. Cosa significa che "rispetta la presenza dello spigolo colorato"? Beh, se immaginiamo di fissare la colorazione di una faccia pentagonale, tra le rotazioni disponibili solo alcune faranno finire questa faccia in un'altra facendo contemporaneamente finire lo spigolo spaiato del primo nello spigolo spaiato del secondo. Facile facile, vero? Purtroppo non è facile visualizzare la cosa, e conosco molti che anche facendo matematica non si sono mai preoccupati di farlo, tanto c'è tutto il calcolo teorico di sottofondo che dà i risultati in modo indolore (da un lato, mentre fa sanguinare dall'altro, questione di bilanciamenti). E dallo stesso calcolare in secondo piano si ottengono tutta una serie di inclusioni tra le strutture indicizzate alla chiusura del primo capitolo. E se io comincio a escludere alcune cose, poi so che dentro tali cose ne trovo solo alcune delle rimanenti previste dalla teoria, posso continuare a tagliare casi su casi.

In breve, possiamo affermare che il gruppo di trasformazioni che conservano la 3-colorazione a meno di permutazioni dei tre colori, ossia G_p , ossia quello che stiamo cercando, deve essere imparentato strettamente con il gruppo T, ossia con l'insieme delle trasformazioni che fissando il tetraedro (all'inizio del capitolo infatti si dichiarava che i due insiemi si identificheranno, cioè si scoprirà che sono proprio uguali. O meglio, quello che cerchiamo e che abbiamo chiamato G_p sarà proprio T), e si escludono anche i casi con riflessioni.

Ok, magari mi sono ripetuto qui e là, ma non è il paragrafo più importante del lavoro quindi basta coglierne l'idea. Veniamo ad un bel teorema, allora. Diviso in tre punti, corrisponde alle successive sezioni del capitolo, e ci dice quando un fullerene sferico, che per noi si chiama $GC_{k,l}$, ammette appunto colorazioni del genere G_p = T. I tre casi sono:

i) l = 0 e k maggioreougualea 1 (non è elegante manon ricordo dove sta il menu matematico)
ii) l = k numeri pari
iii) l-k è una differenza non multiplo di 3 e almeno uno tra l e k è dispari

in più si annota in fondo che l = k = 1 è un caso non colorabile con un livello di simmetria pari a quello tetaedrale che abbiamo richiesto.

Gran bel teorema. E come capita spesso, si dimostra prima la nota in fondo, che è più sbrigativa. Sempre se reputiamo veloce e facile il lemma che segue, il 2.4. Nel nostro caso, il lemma è chiaro e ben enunciato, quindi non mi disturberò a copiarlo come ho già inutilmente fatto col teorema precedente. Per quanto riguarda la dimostrazione, la rileggiamo un secondo... beh, si parte fissando la colorazione di un pentagono, con il supporto di alcune figure magari piccoline ma nel pdf ci si può allargare comodamente... si nomina l'interfaccia di un pentagono (che sarebbe la parte di grafo che connette il pentagono scelto agli altri pentagoni, somiglia molto a quello che si chiama taglio, in teoria dei grafi)... e poi si provano i vari casi, contando le possibili combinazioni ottenute spostando la colorazione dal primo pentagono per mezzo di trasformazioni del tipo T, ricordando che ci sono cinque possibili casi uguali a T come sottoinsiemi delle trasformazioni I, ossia come sottoinsiemi di tutte le trasformazioni possibili. E ricordando inoltre che se ammettiamo il caso chirale ci sono possibilità che, nel caso achirale (ossia quando vogliamo che l'oggetto ottenuto sia uguale se riflesso rispetto a un piano), vanno escluse o comunque diventano la stessa cosa. Quindi i casi si riducono.

Ok, non è facile, lo ammetto, ma almeno un poco, con pazienza, la dimostrazione si può seguire. Almeno fino a un certo punto, poi ci sono alcune inferenze puramente algebriche che magari sorvoleremo per pietà verso il lettore e verso l'autore di questa traduzione, che non saprebbe da dove cominciare per chiarire bene la cosa, soprattutto scrivendo con openoffice che manca di tutta la simbologia necessaria. O forse ce l'ha ma non si sa bene dove. Quindi saltiamo alle conclusioni, ossia notiamo che abbiam contato varie ed eventuali trasformazioni di tutti i colori, cosa di per sé interessante. E se guardiamo le figure di appoggio, notiamo anche che molto poco di quanto detto va bene davvero, ossia possiamo vedere che il caso l=k=1 non permette di colorare tutto in modo coerente (le trasformazioni contate fino a qui conservavano i mutui rapporti dei pentagoni, principalmente, e quindi andando a chiudere il lavoro non avevamo garanzie).

2.3 La famiglia PPI (ossia il caso i del teorema: k maggiore di 1, l =0)

Ok, passiamo baldanzosi alla famiglia PPI, che sarebbe quella dei fullereni sferici nel costruire i quali, col metodo di Goldberg-Coexter, osserviamo i futuri pentagoni ai vertici avere i propri vertici verso l'interno delle facce triangolari, o tiles.

Per questi fullereni, che hanno quei bei numeri di vertici spigoli e facce esagonali (pentagonali sempre dodici, ricordiamolo) che leggiamo qui relativi ai parametri k ed l, valgono alcuni risultati importanti. Ossia quelli del teorema, vabbe'... comunque, per divertimento, potete prendervi un dodecaedro, disegnarne il grafo, e provare a 3-colorarlo. Vedrete che troverete una sola possibilità, ricombinabile con tutte le trasformazioni ammesse dall'insieme T, ma sempre di quella si tratta.

Ora, provate magari a colorare GC_{11} mettendo ai pentagoni i colori che avete dato nel caso del dodecaedro, è un bell'esercizio abbordabilissimo per chi ha pazienza. Poi se uno ne ha davvero tanta, può anche provare a colorare il caso sopraddetto per ottenere tutti i casi raffigurati nella figura

2.3, che è utile da consultare.
Comunque, colorando a partire dai pentagoni “rubati” al dodecaedro, avrete una colorazione del tipo T, che va benissimo. Se invece partite da pentagoni che rispettano quello che otterreste tramite trasformazioni del tipo T_h , quelle comprendenti le riflessioni, vi andate a mettere nei guai. La dimostrazione esposta fa circa questo, in modo sufficientemente generale da affermare che ogni tentativo basato su simili simmetrie dovrà andare male.
E fino ad ora che abbiamo dimostrato? Beh, tra vari discorsi abbiamo detto che le nostre colorazioni dovranno avere, se usiamo 3-colorazioni, delle simmetrie del genere tetraedrale, ossia abbiamo detto che ogni 3-colorazione potrà essere fatta in modo da essere trasformata in al più 24 modi diversi. Poi però abbiamo escluso anche le trasformazioni proprie di T_h , e ci siamo ristretti a T. Ossia potremmo trasformare la nostra 3-colorazione in al più 12 modi diversi.
Trasformare la colorazione mantenendo la simmetria che possiamo cogliere con lo sguardo, detta così alla buona. Insomma, se giro la mia palla di origami di qua, di là, da sotto in su, eccetera, vedrò ancora la simmetria che mostravano i moduli variamente colorati all'inizio? O non troverò piuttosto una zona tutta d'un colore? Nei vertici continueremo a vedere giungere spigoli sempre con gli stessi colori ordinati sempre nello stesso modo? Il succo della questione è questo, lo ribadiamo perchè tra un T e un $GC_{k,l}$ eccetera magari uno si chiede che ci sta a fare al mondo...
Ma andiamo avanti e diamo il colpo finale ai PPI: esiste una colorazione con il massimo di simmetria possibile, ossia che faccia apparire sempre uguale la nostra buckyball quantunque venga trasformata secondo una qualsiasi trasformazione ammessa dal gruppo T?
Ebbene si, esiste. Ed è anche facile, se siete diligenti e avete fatto i compiti a casa, ossia avete provato a colorare il grafo del dodecaedro e avete fatto il tentativo su GC_{11} che avevo consigliato. Se aumentate l'indice k, basta seguire le indicazioni date dai colori già messi sui pentagoni, e poi gli esagoni faranno tutto da sé, ammettendo l'uso di due colori alternantisi sui sei lati. Va via liscio che è un piacere, e se volete, per gradire, c'è una bella figura del caso GC_{30}.
Il discorso regge a meno di simmetrie nella colorazione del dodecaedro e di altre varie situazioni incidentali. Seguendo i paragrafini relativi ai casi particolari, supportati da figure e costituiti da ragionamenti sui grafi che dovrebbero aver cominciato ad essere familiari, possiamo prendere spunto per qualche pratica applicazione, con suggerimenti per 3-colorazioni. Nell'altro file preparato da Andrea, vengono ripresentati i casi più appetibili per un origamista, e siccome ci sono più illustrazioni e meno discussioni, vi rimando lì, augurandovi un buon lavoro.
Comunque oramai siamo i padroni di questa meravigliosa tecnica grafologica, grafistica o grafoide che dir si voglia, che permette di progettare quasi ogni tipo di struttura. Magari non saremo in grado di usare grande algebra come chi ha scritto la tesina, ma un sistema diverso dal “ci provo e spero che dietro si chiuda bene” l'abbiamo assaggiato. Ci sono programmini in rete, gratuiti, che propongono visualizzazione tridimensionale e grafi di vari solidi regolari, tronchi, stellati, eccetera.

2.4 La famiglia PPO (comprende il caso ii del teorema: k = l pari)

Ok, qui i PPO dovrebbero essere abbastanza chiari, almeno per quanto riguarda la denominazione che si dà loro. Per il resto, i paragrafi cominciano ad essere più brevi. Questo è noto come il processo di accelerazione matematico-espositiva: più andate avanti, meno roba serve aggiungere, più importanti (e incomprensibili) saranno i risultati ottenuti. Questa volta con la buona mano di avere i risultati non più complessi, ma del tutto analoghi. Come nota di folklore per illustrare questo fenomeno, potremmo ricordare che uno dei più grandi teoremi dell'algebra e della fisica matematica dice che 2 + 1 = 3. Non sto scherzando, è proprio così, anche se i numeri effettivamente nascondono qualcosina in più.
Il trucco qui è leggersi con calma quel che c'è scritto, saltare le cose che che puzzano troppo di algebra o comunque far finta di averle capite tirando dritto, e cercare di aggrapparsi con le unghie e con i denti ai commenti sulle figure relative ai grafi, che qui guidano molto bene le analisi dei casi.

Sono immediatamente applicabili, nel caso voleste piegare una quantità impressionante di moduli Phizz. Anche se probabilmente avrete i guai vostri nel mantenere la struttura sferica: si prevedono ammosciamenti generali e sgonfiamenti da soufflè.

Con tristezza chiudo qui la traduzione del paragrafo, non c'è davvero nulla da aggiungere al testo originale, e sappiamo cosa togliere.

2.5 Il caso iii del teorema: sferici chirali

Sempre per mantener fede al fenomeno di accelerazione, potremmo chiudere laconicamente con: armatevi di pazienza e leggete la dimostrazione, che è ben illustrata e completa. Magari è anche più complessa, e si fatica a capire dove si va a parare, quali sono i risultati via via ottenuti, eccetera. Ma nulla si può ottenere senza soffrire.

Chiude il paragrafo una nota sui fullereni non sferici, per i quali si mantiene sostanzialmente quanto ottenuto per quelli sferici, se la loro simmetria, per quanto non sferica, è tetraedrale. Ma la cosa pare banalotta, detta così, dato che appunto i casi precedenti mostrano come sia possibile raggiungere la simmetria tetraedrale come risultato massimo e massimamente auspicabile. Fatto sta che effettivamente, più generici sono gli oggetti considerati, più generici e inconsistenti si fanno i risultati elencabili. E quindi, cosa chiedere di più di un bel grafo (oramai abbiamo cominciato ad amarli o odiarli con tutto il cuore, quindi va sempre bene) che illustra un caso non sferico?

Dovrebbe essere anche phizzabile senza troppa fatica (ma non ci metto la mano sul fuoco).

CAPITOLO III

I fullereni non planari

E qui comincia il regno della sofferenza acuta. Il problema di ridurre i fullereni non planari a grafi, composti da esagoni, e collegabili a una costruzione tramite duali di oggetti scomponibili in tiles (ho detto tutto? Speriamolo) è una bestiaccia rognosa. Ci sono di mezzo considerazioni algebriche pazzesche, dimostrazioni tratte da un libro che non ho potuto (forse nemmeno voluto) andare a consultare, e altre divagazioni su geometrie varie ed eventuali, come piani proiettivi et similia. Geometria algebrica feroce, se vogliamo intrigante per esperti, ma del tutto trascurabile ora.
E quindi, un bel salto e andiamo a trovare un amico di vecchia data.

3.3 Un grafo toroidale contenente ettagoni

> *Disclaimer:* *i tempi cambiano, le mamme imbiancano e i file si aggiungono ai file. Quindi possiamo dire con sicurezza che questo paragrafo, alla luce del secondo file di Andrea, è abbastanza superfluo per l'origamista intenzionato a piegare un bel toro... e qui avrei voluto fare un bel gioco di parole linkandovi i diagrammi di un toro, ma poi ho deciso un po' per motivi di politica aziendale e un po' per senso del pudore di non coinvolgere autori esterni. Ma sto divagando. Il problema è che il nuovo file fa un bel lavoro nel chiarire la questione delle figure toroidali, però a questo paragrafo mi ci ero affezionato, soprattutto perchè raramente riesco a scrivere un tale groviglio: lo leggo e mi dico che "si, ho proprio detto quello che volevo dire, e quanto bene l'ho detto!", poi lo rileggo e mi chiedo cosa mai avessi voluto dire. Insomma, un bel pasticcio. Ho deciso di lasciarlo qui. Leggetelo, e decidete voi se avete capito cosa volevate dire.*

Eccolo! È lui! Il solito ciambellone da modulo Phizz! Da almeno 240 moduli, nel caso presente. E ci va benone anche il modo di suddividere in tiles, che danno mostra di sé nei vari piccoli e chiari grafi raffigurati nel paragrafo.
In pratica, il gioco sui grafi è lo stesso di prima, solo qui bisognerà stare più attenti nell'andare a incollare le/i tiles sul toro finale. Le possibili 3-colorazioni sono tantine, anche richiedendo che le/i tiles mantengano colorazioni uguali a meno di permutazioni dei colori, e ci sono alcune considerazioni sulle simmetrie plausibili delle/dei tiles stesse/i. Chissà se più sopra usavo il femminile o il maschile? Mah. Comunque, quelle più coerenti e regolari risultano quelle che hanno tutte le tiles uguali (deciso, femminili), e danno una colorazione simmetrica, con simmetria centrale, rispetto al punto medio del lato che unisce i due pentagoni. Alcune di queste, che sarebbero 14, risultano simmetriche in un modo o nell'altro, e quindi possiamo riassumere il tutto con i sette esempi dati con tanto di figure. Ancora una volta, ricordiamo che sono quelle figure il risultato pratico della discussione: armatevi di pazienza e ricostruite il vostro toro una tile alla volta!
Ci sono cenni a certi circuiti hamiltoniani... cavolo, da quanto tempo voglio fare un toro tutto nero con un circuito che ci si avvolge intorno di moduli in sfumature di arancione, dal quasi giallo al quasi rosso? Beh, abbastanza tempo. La scusa è che fatico a trovare la carta col colore giusto, quelle sfumature così delicate... E questa della carta a sua volta è una scusa per evitare di piegare 240 moduli phizz. La scusa della scusa della scusa è in cantiere.
Ma torniamo a noi: circuiti hamiltoniani? Beh, nella tilizzazione esagonale delirante del primo paragrafo del capitolo, c'era una bella tabellina che indicava caratteristiche di tali ricorrenti oggetti nei fullereni toroidali, davvero interessante, con numero di spire calcolabile. In pratica, possiamo identificare un circuito colorato che si avvolge intorno alla ciambella, sia seguendo la circonferenza

più grande (quella della ciambella), sia seguendo la circonferenza più piccola (ossia la sezione circolare se “tagliamo” il toro”). In pratica, questo circuito, che otteniamo nella struttura completa se usiamo su ogni tile alcune delle colorazioni proposte nella figura 3.6, dovrebbe dare in qualche modo l'idea di avvolgersi spiralizzando intorno alla nostra ciambella. Bello, anche se temo che le cose non siano così immediate. L'amico parla di “effetto 'binari del treno' molto particolare”, il che mi fa dubitare che mettere i moduli phizz come nello schemino dia proprio proprio una bella insegna di barbiere ripiegata su se stessa. Dall'idea che mi son fatto ragionando mollemente su altre e varie eventuali cose del genere, e discutendone insomma con un amico a tempo perso, m'è sovvenuto che la simmetria debba riguardare la colorazione, o meglio la 3-colorazione, e quindi tutti i colori contemporaneamente. In pratica, dovrebbe essere possibile seguire con un certo ordine (ossia saltando da un modulo ad un altro con una regola, magari “da qui al lato opposto se è dello stesso colore”) uno dei tre colori, e si ritorna al punto di partenza dopo essersi avvolti intorno alla circonferenza grande e alla piccola quel numero di volte indicato nella tesina. Questo significa, detto in modo vagamente evocativo, che la colorazione ad esempio numero 2, darà ai tre colori una disposizione a rete tripla che si richiude su se stessa dopo 4 giri della circonferenza maggiore e quattro della minore. Hmm, non è così evocativo... beh, insomma, dovrebbe dare un effetto a trama regolare nell'insieme della ciambella, rendendo non identificabili le connessioni tra le varie tiles. Un po' anche le altre colorazioni, ma risultati diversi per gusti diversi: la colorazione 5 dovrebbe dare, invece di questo effetto “rete” o binari che dir si voglia, una simmetria visibile dal basso in alto, se appoggiamo la ciambella sul tavolo, sdraiata. Qui deve esserci nel gruppo degli esempi anche la colorazione da dentro a fuori che mi pare abbia fatto Gretter, vedo un attimo sul sito... ok, si, era lui anche se la 3-colorazione è di tal Fumagalli. Ed inoltre il toro è un altro toro, da 555 moduli. Non saprei se questo possa essere cabalisticamente rilevante, però è chiaro che ho proprio toppato... ragazzi, bella confusione davvero, sto facendo.

L'esempio gretterico è comunque utile per una variante del discorso, ossia: possiamo riportare quella colorazione alla nostra suddivisione in tiles? Purtroppo no (quindi non c'è negli esempi, ovvio), ma se facendo un salto sul sito si può osservare una bella schematizzazione che richiama l'idea della suddivisione in tiles, anche se tiles diverse da queste della tesina.

CONCLUSIONISSIMA

Molto molto utile, nel complesso, il discorso di tilizzazione, anche se è bene limitarsi a suddividere il poliedro finale, ossia l'origami, perché ricostruire la struttura con artifici tipo Goldberg-Coexter è robaccia da matematici durissimi. Ammetto perfino che alcune cose dei primi due paragrafi del terzo capitolo probabilmente mi costerebbero parecchi succhi gastrici, malgrado qualche esamino di algebra me lo sia dovuto sorbire e la geometria sia un campo che mi stimola spesso a vagare con la mente nelle quattro dimensioni o altre cose altrettanto superflue alla vita sulla terra.

Il difetto principale in ottica origamistica? Non produce niente. Almeno, produce risultati in gran parte noti, ritrovati magari con l'idea più semplice di tutte, ossia il fare le cose più simmetriche possibile, e aiutati da tante prove fatte da tanta gente in tanto tempo. Ad essere onesti, e senza farci sentire dai matematici veri, potremmo ammettere che molte, moltissime cose che oggi vengono presentate allo studente come grandiosi risultati, punti di arrivo o stazioni ineludibili nello sviluppo di grandi, bellissime e completissime teorie, sono spesso raggiunti solo perché già noti e ammirati in altri campi.

Però però, andando a guardare il famigerato secondo file di Andrea, e riguardando alla coinvolgente esperienza di lettura appena conclusa, possiamo dire di essere rimasti con qualcosa di più in mano (e in testa).

Corso di origami alle scuole elementari:

«Maestro, maestro! Ma tu fai matematica?»
«Io sono laureato in matematica, sai, all'università...»
«Ma fai solo matematica?»
«Si, facciamo solo matematica, però ci sono tanti tipi di...»
«E perchè fai matematica?»
«Beh, sai, facendo matematica dopo puoi andare a insegnare, ma anche...»
«Ma fai matematica solo per insegnarla?»
« ... »

Cavolo, certo che si!

La tesi discussa è: Fullereni, simmetrie e colorazioni, di Andrea, IUSS Pavia, '08/'09
Io sono: Carminati Alberto, dissacrante dottore in matematica