

## Origami: Geometria con la carta (1)

di Paolo Bascetta, 1998

*Questo articolo è stato pubblicato sul n° 52 di Quadrato Magico (Aprile 1998).*

**La seconda parte dell'articolo e' stata pubblicata  
sul n. 54 di Quadrato Magico (Ottobre 1998).**

---

La valenza artistica, creativa ed estetica dell'Origami, è ormai nota a tutti. Il prof. Benedetto Scimemi in [1] riporta tra l'altro:

*"...L'apporto educativo di giochi e passatempi basati sul piegare la carta è stato ampiamente riconosciuto dai pedagogisti, perchè si tratta di attività che richiedono un controllo simultaneo manuale ed intellettuale ma lasciano grande spazio alla fantasia ed alla creatività....".*

Non altrettanto nota la sua applicazione in ambito matematico, soprattutto nell'ambiente scolastico. Vorremmo, dalle pagine di questa rivista, cercare di far conoscere ed apprezzare agli operatori della scuola, le grandi potenzialità didattiche offerte da questa tecnica. Cominciamo col mostrare l'interpretazione matematica delle regole di base.

### Procedure euclidee elementari

La geometria euclidea, in assoluto il primo sistema logico assiomatico a noi noto, è fondata su alcuni Enti fondamentali: punto, retta, piano e su ben noti Postulati. Sul piano euclideo possiamo, usando come unici strumenti una riga non graduata ed un compasso, considerare come "lecite" le seguenti procedure [2] [3]:

**E1** *"Dati due punti distinti P e Q è possibile, usando la riga, tracciare l'unico segmento che congiunge i due punti e prolungarlo in entrambi i versi"*

**E2** *"Dato un punto ed un segmento è possibile, usando il compasso, tracciare l'unica circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio"*

Le applicazioni E1 ed E2, generano rette e circonferenze; su questi nuovi enti sono permesse le seguenti procedure d'intersezione che generano a loro volta nuovi punti:

**E3** *"Date due rette non parallele è possibile determinare il loro punto di intersezione"*

**E4** *"Data una circonferenza ed una retta tale che la sua distanza dal centro sia minore del raggio, è possibile determinarne i punti di intersezione"*

**E5**

*"Date due circonferenze tali che:*

- a) nessuna delle due contiene il centro dell'altra e la distanza tra i centri è minore della somma dei raggi,*
- b) una contiene il centro dell'altra e la distanza tra i centri non è minore della differenza tra i raggi,*

*allora è possibile determinarne le intersezioni"*

Una costruzione geometrica è detta eseguibile con i metodi euclidei della riga e del compasso, se ottenuta iterando un numero finito di volte le procedure **E1-E5** precedenti e solo esse.

## Geometria origami

Unico ente fondamentale della geometria origami [2] [3] è un foglio di carta, pensato illimitato, che chiameremo piano, trasparente, sottile, ma abbastanza robusto, di spessore uniforme, non deformabile in maniera apprezzabile lungo la sua superficie, cioè non elastico; è invece deformabile perpendicolarmente alla sua superficie, per permetterne la sovrapposizione di alcune sue parti, ottenendo così quella che chiameremo piega.

### Postulati:

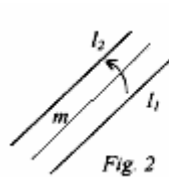
- 1.** *La traccia di una piega è un segmento rettilineo (limitatamente al foglio). Il punto risulta essere l'intersezione di due pieghe.*
- 2.** *Data un piega, è possibile sovrapporre la piega a se stessa. La superficie è allora divisa in quattro angoli uguali attorno al punto di intersezione. Chiamiamo retto ( $R$ ) ciascuno di questi angoli.*

### Procedure geometriche elementari della geometria origami

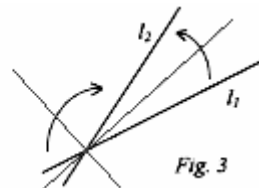
**O1** *"Date due pieghe non parallele  $l_1$  ed  $l_2$ , è possibile determinarne il loro punto di intersezione  $P$  (fig. 1)". Questa procedura specifica come ottenere punti: dall'intersezione di due pieghe.*



**O2** *"Date due pieghe parallele  $l_1$  ed  $l_2$ , è possibile piegare, in maniera univoca,  $l_1$  su  $l_2$  ottenendo una piega  $m$  parallela ed equidistante da entrambe (fig. 2)".*



**O3** *"Date due pieghe incidenti  $l_1$  ed  $l_2$ , è possibile piegare, in due distinti modi, sovrapponendo  $l_1$  ad  $l_2$  ottenendo così le bisettrici degli angoli formati dalle due pieghe (fig. 3)". Questa procedura permette di costruire la bisettrice di un angolo. Le bisettrici ottenute sono tra loro perpendicolari.*



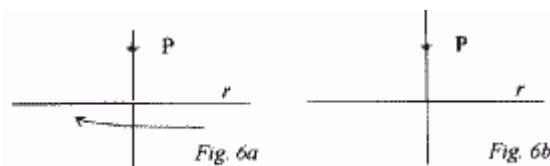
**O4** *"Dati due punti distinti  $A$  e  $B$ , è possibile piegare, sovrapponendo ciascuno di questi due punti a se stesso (fig. 4a), ottenendo la piega che li congiunge (fig. 4b)".*



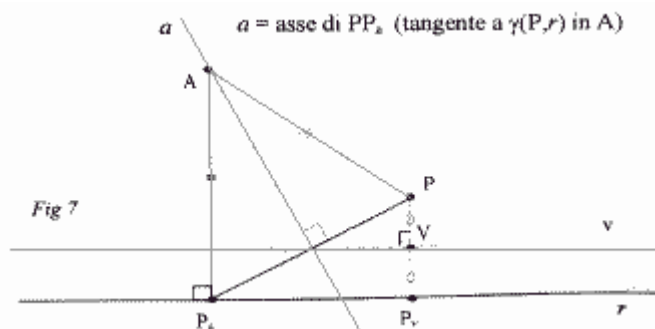
**O5** "Dati due punti distinti  $A$  e  $B$ , è possibile piegare, sovrapponendo il punto  $A$  al punto  $B$  (fig. 5a), ottenendo la piega  $r$ , asse del segmento  $AB$  (fig. 5b)".



**O6** "Data una piega  $r$  ed un punto  $P \notin r$ , è possibile piegare, sovrapponendo contemporaneamente il punto  $P$  su se stesso e la piega  $r$  su se stessa (fig. 6a), per ottenere l'unica piega per  $P$  perpendicolare alla piega  $r$  (fig. 6b)".

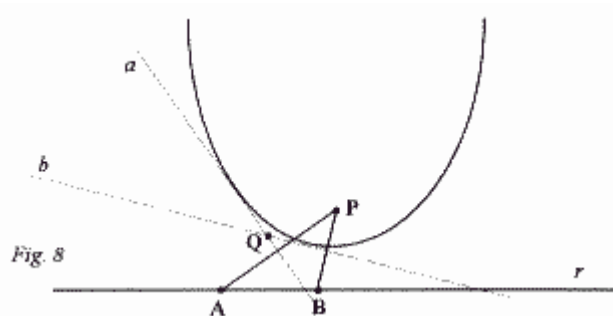


**O7** "Dato un punto  $P$  ed una piega  $r$  non passante per  $P$  e scelto  $Pa \notin r$ , è possibile piegare sovrapponendo  $P$  a  $Pa$ , ottenendo una tangente  $a$  alla parabola di fuoco  $P$  e direttrice  $r$ , che d'ora in poi chiameremo  $g(P,r)$  (fig. 7)".



Consideriamo la piega  $a$  che si ottiene dalla sovrapposizione di  $P$  a  $Pa$  e dimostriamo (fig. 7) che tale piega è tangente alla parabola in  $A$ , cioè che ha un solo punto in comune con la  $g(P,r)$ . Infatti, per **O5**, si ha che la piega  $a$  risulta essere asse del segmento  $PPa$  e quindi ogni suo punto è equidistante da  $P$  e da  $Pa$ . Mandiamo per  $Pa$  la perpendicolare alla direttrice. Questa incontra la piega  $a$  in  $A$ . Allora  $A$  è equidistante da  $P$  e dalla direttrice  $r$  quindi è un punto della  $g(P,r)$ . Gli altri punti dell'asse  $a$  non appartengono alla  $g(P,r)$  in quanto la loro distanza da  $Pa$  (e quindi da  $P$ ) è maggiore della loro distanza dalla direttrice  $r$ .

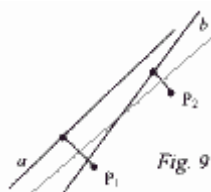
**O8** "Dato un punto  $P$ , una piega  $r$  non passante per  $P$ , ed un ulteriore punto  $Q$  la cui distanza da  $P$  non sia inferiore di quella da  $r$  (con tale limitazione  $Q$  non è interno alla  $g(P,r)$ ), è possibile piegare come in **O7** (cioè portare  $P$  su  $r$ ) facendo però in modo che  $Q$  si sovrapponga a se stesso, ottenendo così una delle due tangenti per  $Q$  alla parabola  $g(P,r)$  (fig. 8)".



Con le limitazioni imposte al punto Q, questa piega è sempre possibile. In particolare: se la distanza di Q da P è maggiore di quella da r, per quanto detto in O7, si ottengono le due tangenti alla  $g(P,r)$  passanti per Q; se invece la distanza di Q da P è uguale a quella da r, si ha una sola possibilità e quindi una sola tangente alla  $g(P,r)$  passante per Q il quale risulta quindi essere il punto di tangenza; se infine la distanza di Q da P è inferiore a quella da r non è possibile eseguire la piega descritta. (\*)

(\*) Come sappiamo dalla geometria analitica, la ricerca della tangente ad una parabola è un problema di secondo grado, quindi questa piega corrisponde a risolvere un'equazione di secondo grado.

**O9** "Dati due punti distinti  $P_1$  e  $P_2$ , e due pieghe distinte  $a$  e  $b$ , è possibile piegare, sovrapponendo contemporaneamente il punto  $P_1$  ad un punto A della piega  $a$ , ed il punto  $P_2$  ad un punto B della piega  $b$  (fig. 9)". Tale procedura, in virtù delle considerazioni precedenti, permette di ottenere una tangente comune alle due parabole  $g(P_1,a)$  e  $g(P_2,b)$ .



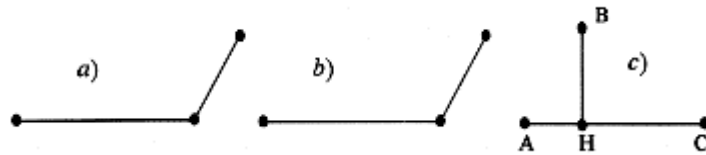
Si può dimostrare, che questa procedura corrisponde a risolvere un'equazione di 3° grado. Pertanto la procedura è sempre possibile e, in casi particolari, in tre modi distinti.

**Questa procedura O9 è quella che rende la geometria origami fundamentalmente diversa dalla geometria euclidea (e, in un certo senso che vedremo, addirittura più "potente").**

Per prendere confidenza con questa tecnica, proponiamo al lettore, tre problemi [4] da risolvere utilizzando esclusivamente le procedure **O1-O8**.

Costruire un triangolo rettangolo conoscendo le misure:

- di due cateti congruenti ad AB e BC;
- dell'ipotenusa (congruente a AC) e di un cateto (congruente a BC);
- dell'ipotenusa (congruente ad AC) e dell'altezza ad essa relativa (congruente a BH).



Le soluzioni verranno proposte nel prossimo articolo!

[Paolo Bascetta](#), 1998.

Copyright © 1998 Centro Diffusione Origami

---

### Riferimenti bibliografici:

	Autore	Titolo
[1]	B. Scimemi	<i>Algebra e geometria piegando la carta</i> , in: Ed. Apeiron, <i>Matematica: gioco ed apprendimento</i> , Roma, 79-87.
[2]	R. Geretschlager	<i>Euclidean Constructions and the Geometry of Origami</i> , <i>Mathematics Magazine</i> , 68, 5, 1995.
[3]	H. Huzita	<i>Axiomatic Development of Origami Geometry</i> , in: H. Huzita (ed.), <i>Origami Science &amp; Technology</i> , Ferrara 1989, 143-158.
[4]	T. Sundara Row	<i>Geometric Exercises in paper-folding</i> , Dover Publications, 1966.

**Centro Diffusione Origami** - <http://www.origami-cdo.it>