Coniglietti Aurei

di Andrea Centomo e Lucia Gecchelin

Pubblicato sul Numero 83 di **Quadrato Magico**,
rivista del **Centro Diffusione Origami**
http://www.origami-cdo.it

Abbiamo già avuto occasione di guardare al rapporto fecondo che lega l'origami e la matematica. Possiamo infatti piegare numerosi modelli che rappresentano oggetti geometrici significativi o ci possiamo servire di teorie matematiche per progettare nuovi e particolari modelli. In queste pagine vogliamo esplorare altri legami tra origami e matematica. L'idea che ha dato origine a questo articolo è stata quella di partire da concetti matematici interessanti e creare un modello che li contenesse e li rappresentasse, pur se non esplicitamente visibili. Proponiamo un semplice modello di coniglietto che si scopre assai ricco di matematica!

La matematica

Tra i matematici di maggior rilievo nel tardo Medioevo si ricorda Leonardo Pisano (1180 circa – 1250) più noto come Fibonacci o "figlio di Bonaccio", che era un mercante italiano. I rapporti d'affari che Bonaccio intratteneva permisero al figlio di studiare sotto la guida di un maestro musulmano nell'Africa settentrionale e di viaggiare in Egitto, in Siria e in Grecia; non stupisce quindi che Fibonacci fosse a conoscenza di metodi algebrici arabi e del sistema di notazione indo-arabico, che ebbe una parte importante nel processo di trasmissione della cultura matematica.

L'opera maggiormente significativa scritta da Fibonacci è il *Liber Abaci.* In esso vengono esposti procedimenti algoritmici e aritmetici, argomenti relativi a transazioni commerciali e inoltre si affrontano altri problemi interessanti che hanno ispirato autori posteriori. Un problema celebre è quello dei conigli, che possiamo formulare come segue:

> *Supponiamo che una coppia di conigli di un mese sia troppo giovane per riprodursi, ma sia sufficientemente matura per riprodursi all'età di due mesi. Supponiamo inoltre che ogni mese, a partire dal secondo, i conigli producano una nuova coppia. Se ciascuna coppia di conigli si riproduce nel modo appena descritto, quante coppie di conigli si avranno all'inizio di ciascun mese?*

La risposta è data dalla "successione di Fibonacci": 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., F_n , ..., dove

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_0 = F_1 = 1$$

ossia, ciascun termine dopo i primi due è la somma dei due termini immediatamente precedenti. Questa successione possiede diverse proprietà eleganti e significative. Ad esempio, si può dimostrare che due termini successivi qualsiasi sono sempre primi tra loro e che il loro rapporto

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

tende al **numero aureo** τ. Il numero aureo compare curiosamente in numerose questioni biologiche legate allo sviluppo organico, oltre ad essere ben nota la sua importanza nell'arte classica.

Conigli Aurei

Nella letteratura origamistica il coniglio compare con una certa frequenza, recentemente anche in modelli che si prefiggono di richiamare esplicitamente il tema della riproduzione di questo animale. Disporre di un modello di coniglio in cui sia evidente un rapporto con concetti quali la successione di Fibonacci e il numero aureo, oltre ad essere divertente per chi si diletta di Matematica, potrebbe essere utile per tutti gli insegnanti che saggiamente utilizzano la piegatura della carta nella didattica.

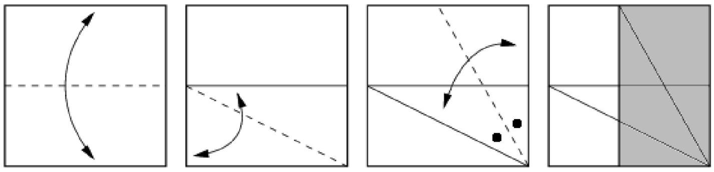
Lo scopo che ci siamo prefissi in questo articolo è di costruire una coppia di "conigli aurei". Non essendo coloro che scrivono origamisti creativi, la soluzione proposta apparirà semplice e non molto interessante per gli esperti. Tuttavia saremmo sicuramente molto lieti se in futuro verranno elaborati modelli nuovi e più originali prendendo spunto da questa nostra sollecitazione.

La costruzione di una coppia di conigli aurei che qui suggeriamo è stata realizzata in due momenti:

1. piegatura della base, che per ciascun coniglio è mezzo rettangolo aureo
2. adattamento del modello di coniglio di N. Robinson.

Rettangolo Aureo

La piegatura di un rettangolo aureo a partire da un quadrato si può eseguire in quattro passaggi:



Il rettangolo aureo è evidenziato in grigio.

Partendo da un rettangolo pari a **mezzo rettangolo aureo** possiamo piegare un coniglietto seguendo i diagrammi riportati alla fine dell'articolo.

Se pieghiamo così una coppia di conigli, ciascuno dei due viene costruito a partire da un rettangolo che richiama il numero aureo, per questo li abbiamo chiamati *coniglietti aurei*. Inoltre, piegandone due essi possono rappresentare la coppia di conigli da cui parte la successione di Fibonacci.

Orecchie d'Argento

Il numero aureo può essere rappresentato attraverso ciò che i matematici chiamano *frazione continua*. Senza entrare in questioni di carattere matematico, per le quali si rinvia alla bibliografia, ci limitiamo ad osservare che la rappresentazione del numero aureo come frazione continua è la seguente:

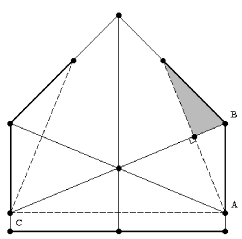
$$[1,1,...] = \tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

Se nella frazione continua che rappresenta il numero aureo al posto del numero 1 si sostituisce opportunamente il numero 2 si ottiene la frazione continua che rappresenta il **numero d'argento**

$$[2,2,...] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}}$$

Si dimostra che il numero d'argento è pari a $\sqrt{2}+1$.

Curiosamente questo numero è richiamato in un passaggio del processo di piegatura del coniglietto aureo, in particolare nella piega che permette di costruire le orecchie, al passaggio 10) dei diagrammi. Questa piega crea diversi triangoli, uno di essi è evidenziato in grigio. Il triangolo ABC è simile a tutti questi. Si tratta di un



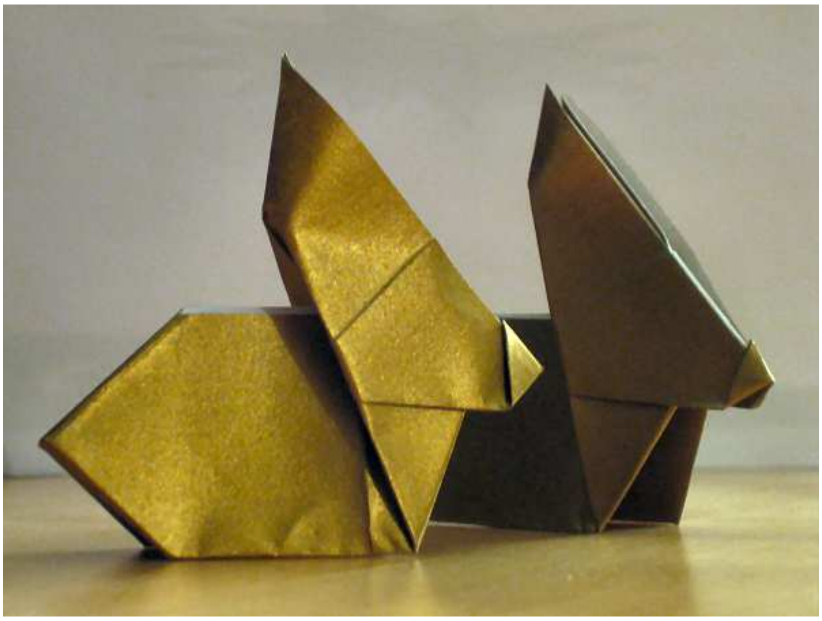
triangolo rettangolo con gli angoli non retti di $3\pi/8$ e $\pi/8$. Così che il rapporto tra le lunghezze dei cateti del triangolo rettangolo ABC è pari al numero d'argento

$$\frac{AC}{AB} = cotg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1$$

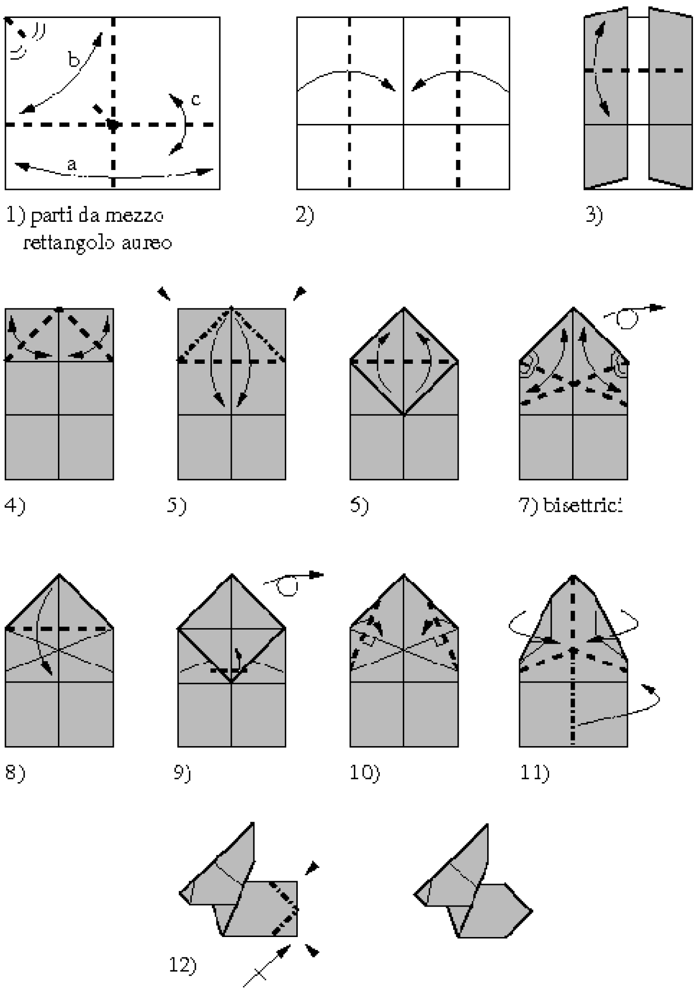
Quindi, le orecchie del coniglietto aureo sono d'argento!

Buone pieghe a tutti,

Andrea Centomo e Lucia Gecchelin



Diagrammi del coniglietto aureo



Bibliografia

[1] C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Edizioni Oscar Mondadori, Milano, 1980.

[2] T. Pappas, *Le Gioie della Matematica*, Edizioni Biblioteca Muzio, Padova, 1995.

[3] N. Robinson, *Adult Origami*, New Holland Publishers, UK, 2004.