Concedetemi un taglio...

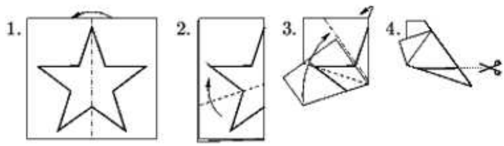
di Lucia Gecchelin

Articolo pubblicato sul n.81 di “Quadrato Magico”,
rivista periodica del Centro Diffusione Origami

In queste pagine vedremo cosa possono avere a che fare tra loro giochi di prestigio, origami, basi classiche, modelli nuovissimi e matematica!

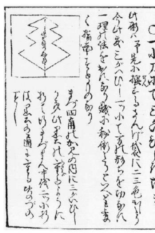
Riportiamo innanzitutto dei risultati interessanti sul *problema del taglio unico*.

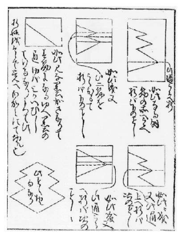
> *Quali figure costituite da segmenti si possono ottenere dopo aver piegato un foglio di carta in un origami piatto e aver eseguito un unico taglio lungo una retta, se si dispiegano i pezzi di carta rimasti?*



Un esempio classico è quello in figura, dove viene mostrato come piegare un foglio quadrato per ottenere una stella a cinque punte, mediante un unico taglio.

La prima pubblicazione in cui comparve il problema del taglio unico è un libro giapponese, che contiene una raccolta di problemi per testare l'intelligenza matematica, “Wakoku Chiyekurabe” di Kan Chu Sen, del 1721. Nelle immagini qui sotto sono riportate la copertina di questo libro e le pagine in cui è enunciato il problema e in cui viene fornita la soluzione.





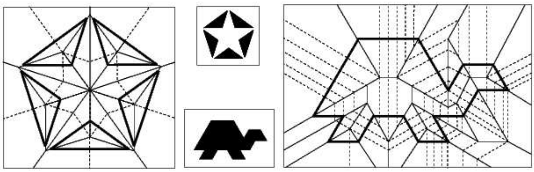
Houdini utilizzava questa tecnica nei suoi giochi di prestigio e nel libro *Paper Magic* del 1922 descrisse un metodo per ottenere una stella a cinque punte. Gerald Loe, un altro prestigiatore, analizzò in dettaglio il problema e ne scrisse in *Paper Capers* nel 1955, descrivendo anche come ottenere numerosi insiemi di vari oggetti geometrici. Martin Gardner si occupò del problema, particolarmente impressionato dall'abilità di G. Loe. Gardner per primo nel 1995 affermò che ottenere, attraverso un taglio unico, dei poligoni complessi era un problema aperto.

Erik Demaine e altri dal 1997 in poi hanno dimostrato con varie tecniche che

> *Qualunque collezione di segmenti di retta può essere ottenuta mediante un unico taglio dopo aver opportunamente piegato un origami piatto!*

Si pensi a qualunque insieme di poligoni convessi e non, disgiunti, innestati l'uno nell'altro, bucati, ...

In figura si vedono due esempi



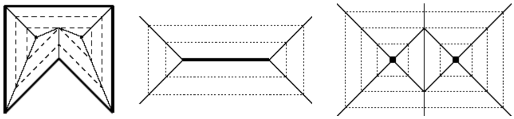
Si troverà sempre un crease pattern di un origami piatto in cui tutti i segmenti del bordo della figura desiderata saranno uno sull'altro lungo una stessa retta, in modo che eseguendo un taglio lungo questa retta e riaprendo il foglio si avrà la figura.

In generale, le dimostrazioni sono costruttive, conducono sempre al crease pattern appropriato con la corretta assegnazione di pieghe a monte e a valle; ma non indicano la sequenza di piegatura per ottenere l'origami piatto sul quale eseguire il taglio. La sequenza di piegatura è data sempre se la figura è un poligono convesso [2].

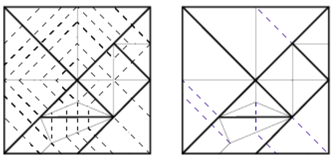
Sono state utilizzate due tecniche principali di risoluzione:

1. Straight skeleton
2. Disk packing.

La prima generalizza l'idea che per allineare due segmenti si deve piegare lungo la bisettrice delle loro estensioni. Questa dimostrazione prende in considerazione il problema da un punto di vista globale, riuscendo a catturare le simmetrie della figura che si vuole ottenere, e in genere conduce a crease pattern che si piegano più facilmente. *Straight skeleton* è l'insieme delle traiettorie che i vertici della figura percorrono se la si restringe in modo che i lati siano sempre paralleli a quelli della figura di partenza e si muovano con velocità costante in una direzione perpendicolare. Se si ottengono bordi chiusi non semplici, il processo di restringimento procede per ciascuna delle nuove figure che si sono create. Nell'immagine seguente si vedono alcuni esempi di staight skeleton. La figura di partenza è disegnata in neretto, i tratteggi rappresentano alcune posizioni durante il restringimento e i segmenti dello straight skeleton sono le sottili linee continue.



In questo modo, per figure non troppo complicate, le traiettorie dello straight skeleton sono le bisettrici dei lati adiacenti della figura. Per poter ottenere le pieghe che, insieme a quelle che costituiscono lo straight skeleton, permettono di piegare un origami piatto, si aggiungono delle "perpendicolari". Queste si costruiscono facendo partire da ogni vertice dello straight skeleton un raggio perpendicolare ad ogni lato raggiungibile della figura che vogliamo ottenere e facendolo riflettere ogni volta che il raggio incontra un lato dello skeleton. Si dimostra che le pieghe dello straight skeleton, un sottoinsieme di queste perpendicolari e poche altre pieghe ausiliarie permettono la piegatura di un origami piatto. Nella figura seguente è mostrato quale crease pattern si ottiene mediante questo procedimento per i pezzi del tangram. A sinistra sono mostrate tutte le perpendicolari, a destra solo le pieghe necessarie alla piegatura.



La soluzione mediante il *disk packing* affronta il problema da un punto di vista più "locale", ma presenta il vantaggio di condurre ad un crease pattern con un numero di pieghe limitato in termini del numero di vertici della figura e della distanza minima tra oggetti coinvolti. E' interessante analizzare questa tecnica anche perché i suoi principi vengono utilizzati da Robert J. Lang [5] per la progettazione di nuovi modelli origami.

Qui di seguito, affronteremo il problema in termini matematici e proporremo una traccia della dimostrazione mediante il disk packing secondo il lavoro in [4]. Iniziamo dando delle definizioni.

Definizione 1 Diremo *grafo piano* un grafo planare tale che ogni lato appartenga ad una retta e abbia lunghezza positiva e tale che ciascuna coppia di lati chiusi si intersechi solo in un vertice. Si ammettono lati con zero, uno o due vertici, che corrispondono rispettivamente a rette infinite, semirette infinite e segmenti di retta.

Definizione 2 *Crease pattern* è un grafo piano.

Definizione 3 *ORIGAMI* o *piegatura di un crease pattern* è una funzione continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che mappi ogni faccia del crease pattern in una sua copia congruente nello spazio tridimensionale. Poiché la piegatura non deve indurre alcuna intersezione del foglio con se stesso, si assume che le facce siano separate da una distanza infinitesimale e si vuole che la funzione sia iniettiva.

Osserviamo, che una piegatura così definita dà lo stato piegato e non la sequenza di piegatura.

Definizione 4 *Origami piatto* è un origami la cui immagine appartenga ad un piano, $\mathbb{R}^2$.

Definizione 5 *Assegnamento monte-valle* in un crease pattern, indica se una piega sarà a monte o a valle, cioè se il lato formerà un angolo di π o - π rispetto al lato superiore del foglio posto su un piano.

Osserviamo anche che, nel modello matematico di un origami, si astrae il foglio di carta come una superficie non deformabile di spessore nullo.

Date queste definizioni, possiamo esprimere il problema del taglio unico in termini matematici

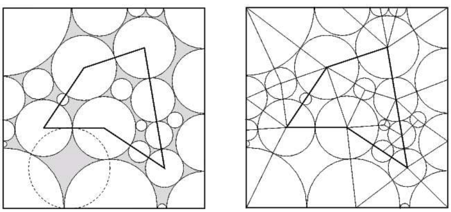
> *Dati un poligono P (non necessariamente convesso e con una o più componenti connesse) e un rettangolo R abbastanza grande da contenere P, trovare una piegatura piatta di R tale che una sezione trasversale dell'origami con un piano perpendicolare sia il bordo di P.*

La strategia risolutiva si sviluppa come segue. Si dispongono dei cerchi in modo tale che i centri dei cerchi inducano una triangolazione-quadrangolazione mista che rispetti il contorno di P. Si piega ogni triangolo e ogni quadrilatero interno (esterno) a P sopra (sotto) al piano del foglio di partenza, in modo che i bordi di questi triangoli e quadrilateri si allineino tutti lungo una stessa retta e che le pieghe di poligoni vicini abbiano orientamenti coerenti così da ottenere un origami piatto. Un taglio attraverso il piano dell'origami, lungo la retta che contiene il bordo di P, separerà l'interno (contenente l'interno della figura desiderata) di P dall'esterno.

Più in dettaglio, se si indica con PR il grafo piano costituito dall'unione dei segmenti del bordo di P e del bordo di R, si cerca una disposizione di cerchi con interni disgiunti tale che ogni lato di PR sia unione di raggi di cerchi e tale che i dischi inducano una partizione di R in triangoli e quadrilateri.

Definizione 6 Si dice *gap* ogni porzione connessa di R meno i dischi. Un gap si dice *3-gap* se è limitato da tre archi, *4-gap* se è limitato da quattro archi.

Si comincia ponendo, per ogni vertice *v* del grafo PR, un cerchio centrato in *v* e il cui raggio sia metà della distanza di *v* dal lato di PR più vicino e non incidente a *v*. Poi, si introduce un nuovo vertice di suddivisione in ogni punto di intersezione di PR con una circonferenza. Del grafo PR così ottenuto, si considerano i lati non coperti da dischi. Si inseriscono altri vertici del grafo nei loro punti medi, se eventuali dischi con diametro uguale a questi lati hanno diametri che intersecano diametri di dischi su altri lati di PR. Si procede così aggiungendo dischi centrati nei vertici del grafo, che si va arricchendo di vertici, fino a che ogni lato del grafo sia unione di raggi di dischi. Poi, si inseriscono altri dischi (è dimostrato che questi sono in numero finito) in R fino a che tutti gap tra i dischi siano 3-gap o 4-gap. Infine, al grafo PR si aggiungono i segmenti che uniscono i centri dei dischi tangenti e si troverà una decomposizione di R in triangoli e quadrilateri. Si otterrà qualcosa di simile a quanto mostrato nella figura seguente

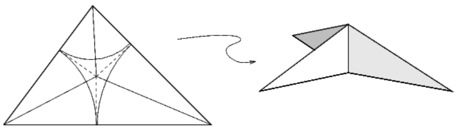


Ora, ogni lato di P appartiene al bordo di un triangolo o di un quadrilatero. Si vuole piegare un crease pattern in modo che tutti i segmenti dei bordi del grafo così ottenuto si allineino lungo un'unica retta (lungo la quale si praticherà il taglio). Si pensi ciascun triangolo e ciascun quadrilatero indipendente dagli altri e si cerchi una sua piegatura piatta opportuna. Si stanno cercando delle *molecole* con le quali costruire il crease pattern.

Il biochimico e origamista Meguro ha chiamato *molecole* i tasselli che si possono assemblare in configurazioni anche complesse per formare crease pattern; in analogia a quanto accade in natura. Nell'ambito della matematica-origami, si dà la seguente

Definizione 7 Una *molecola* è una piegatura piatta di un poligono, tale che i lati del poligono si trovino allineati lungo un'unica retta.

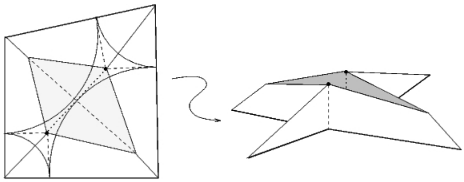
La molecola per i triangoli si chiama *molecola orecchio di coniglio*



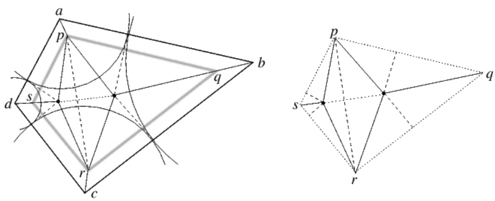
Per ogni triangolo essa si ottiene piegando a monte le bisettrici del triangolo, a valle due delle tangenti ai cerchi centrati nei vertici del triangolo e a monte la terza tangente. I lati del triangolo sono tutti allineati e anche i punti di tangenza dei tre cerchi appartengono alla stessa retta di allineamento e sono coincidenti. Osserviamo che la struttura geometrica che soggiace alla piega a orecchio era nota a Euclide, che dimostrò che le bisettrici di un triangolo si incontrano in un punto e che i triangoli adiacenti formati da segmenti di bisettrici con vertici il centro e un vertice del triangolo sono congruenti.

Per i quadrilateri ci sono varie molecole. In particolare, per quadrilateri formati congiungendo i centri di quattro cerchi a due a due tangenti, le bisettrici dei quattro angoli si intersecano in un unico punto. Piegando lungo le bisettrici si può collassare il quadrilatero in modo che i suoi bordi si trovino allineati. La molecola così ottenuta si chiama *molecola waterbomb*. Osserviamo che più di una configurazione di quattro cerchi tangenti può dare lo stesso quadrilatero, ma la molecola waterbomb è unica. Quindi, in generale, questa molecola non fa coincidere i punti di tangenza. Poiché le molecole utilizzate nelle basi di Lang richiedono questa proprietà, introduciamo un'altra molecola che la possegga: la *molecola gusset*. Essa può essere piegata per ogni quadrilatero che sia formato congiungendo i centri di quattro cerchi a due a due tangenti. E' un po’ più complicata di altre molecole ma si presta ad essere implementata con metodi numerici, inoltre allinea solo i lati del bordo e non ci sono pieghe interne che giacciono lungo l’asse.

In questa molecola, una parte delle bisettrici degli angoli del quadrilatero sono piegate a monte fino a toccare i vertici di un quadrilatero (detto *gusset*) interno a quello di partenza.



Questo quadrilatero interno viene triangolato con una delle sue dia-



gonali piegata a valle e ciascun triangolo viene piegato in una molecola simile a quella descritta sopra. Due vertici del gusset sono fissati dalla condizione che pieghe a valle si estendono perpendicolarmente dai punti di tangenza. Gli altri due vertici soggiacciono alla sola condizione di appartenere alle bisettrici degli angoli del quadrilatero. Nella figura seguente è mostrato un metodo per ottenere questi due vertici (i punti *p* e *r*).

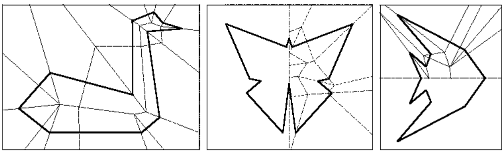
Si restringe il quadrilatero di partenza mantenendo i lati paralleli ed equidistanti a quelli originali fino ad ottenere un quadrilatero che viene suddiviso da una sua diagonale esattamente in due molecole a orecchio di coniglio.

Scegliendo una piegatura adatta per ogni singola molecola, abbiamo lavorato affrontando il problema da un punto di vista locale. Per ottenere la soluzione finale del problema, dobbiamo unire le molecole e trovare il corretto assegnamento monte-valle del crease pattern nella sua globalità. L'assegnamento dipende dall'intera struttura della configurazione di cerchi e dal fatto che più molecole sono coinvolte nella piegatura di una punta dell'origami finale. Per unire le molecole, si possono assegnare degli orientamenti fissati ad alcune pieghe: le bisettrici degli angoli sono a monte se interni a P, a valle se esterni; i bordi di P non si piegano. A tutti gli altri lati si assegna un orientamento di default che potrà poi essere modificato: lati di tangenza e lati di quadrilateri e triangoli sono inizialmente a valle se interni a P e a monte se esterni. Ricordiamo che i vertici nell'interno di R devono soddisfare i seguenti

Teorema di Maekawa-Justin Attorno ad un vertice interno ad un crease pattern di un origami piatto deve essere M-V = +2 o M-V = -2 (dove M è il numero di pieghe a monte e V il numero di pieghe a valle).

Teorema di Kawasaki In ogni vertice interno ad un crease pattern di un origami piatto la somma degli angoli alternati deve essere 180°.

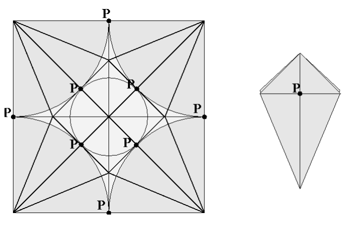
Si può arrivare ad ottenere un assegnamento che soddisfi queste



richieste e tale che tutti i lati del bordo di P siano allineati e le facce del crease pattern interne a P si trovino al di sopra della linea del taglio e le facce esterne a P al si sotto. Ora, concediamoci un taglio!

Abbiamo già accennato che il metodo del disk packing e le molecole possono essere usati in altro modo. R. J. Lang ci spiega come svelandoci qualche suo “segreto” per la progettazione di nuovi origami [5]. Il suo studio si concentra sulla costruzione di crease pattern di modelli le cui strutture fondamentali, come proporzioni, numero di punte, simmetrie, ..., conducono a basi particolari, chiamate *basi uniassiali*.

Osserviamo che quasi tutte le basi classiche sono uniassiali. Inoltre base dell'aquilone, base del pesce, base della gru e base della rana sono tutte composte con lo stesso tassello triangolare! Nella figura seguente (per la quale ringrazio R. Gretter) possiamo osservare il crease pattern della base della gru in cui sono evidenziati dei settori di cerchi in corrispondenza delle punte della base stessa e i punti di tangenza di questi cerchi.



Ripercorriamo qui rapidamente alcune considerazioni che aprono la strada all'analisi del metodo di Lang, di cui si potrà discutere successivamente.

Osservando le basi classiche, si nota che esse sono costituite dagli stessi tasselli uniti su vari lati. Possiamo quindi cominciare a pensare che tutte le basi potrebbero essere costruite assemblando alcuni tasselli in modi particolari.

Osserviamo poi che l'area di carta che viene impiegata in una punta del modello si trova inscritta in un arco di circonferenza di raggio pari alla lunghezza della punta e con centro all'interno del foglio di partenza. Quindi, ogni punta che vogliamo nel modello sarà rappresentata da un cerchio con centro nel foglio e di raggio pari alla lunghezza della punta. Inoltre, due cerchi, che daranno vita a due punte distinte, non si sovrapporranno l'uno all'altro.

Generalizzando le caratteristiche delle basi classiche, si giunge alla

Definizione 8 Si dice *base uniassiale* un origami in cui tutte le punte sono allineate su una singola retta, l'*asse*; la “cerniera” di ciascuna punta è perpendicolare all'asse. Su questa stessa retta si trova il punto in cui cadono tutti i punti di tangenza dei cerchi che rappresentano le punte.

Si chiamano *pieghe assiali* le pieghe che giacciono lungo l'asse, e *poligono assiali* i poligoni nel crease pattern i cui bordi sono pieghe assiali o bordi del foglio.

Le pieghe assiali congiungono i centri dei cerchi che rappresentano le punte della base. Le “cerniere” delle punte corrispondono alle tangenti ai cerchi e sono perpendicolari all'asse. Le pieghe, che nella base piegata formano gli spigoli della figura, corrispondono alle bisettrici degli angoli dei poligoni assiali. Nella base piegata, l'intero perimetro dei poligoni assiali si trova a giacere lungo l'asse. Quindi possiamo assegnare localmente una *molecola* ad ogni poligono assiale, per poi cercare una piegatura globale del crease pattern che abbia le caratteristiche desiderate per la base. Con metodi numerici, si trova una molecola opportuna per ogni poligono assiale. Nel caso delle basi uniassiali, a differenza di quanto abbiamo visto per il problema del taglio unico, si potranno avere poligoni con più di quattro lati. Per ciascuno di questi si può trovare una suddivisione in triangoli e quadrilateri ai quali applicare le molecole orecchio di coniglio e gusset. Infine, si ottiene un crease pattern di una base con le caratteristiche desiderate per il modello che si vuole piegare.

A questo punto, basta con matematica e tecnica, ci vuole un buon origamista che pieghi la base e aggiunga i particolari caratteristici del modello!

Lucia Gecchelin
lgecchelin@libero.it

Nota: tutte le figure presenti in questo articolo sono state prese dai vari articoli e dal sito di E. Demaine, in bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

1. http://theory.csail.mit.edu/~edemaine/
2. Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, “Computing extreme origami bases”, Tech. Report CS-97-22, Dipartimento di Computer Science, U. of Waterloo, Maggio 1997
3. Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Anna Lubiw, “Folding and Cutting Paper”, *Revised Papers from the Japan Conference on Descrete and Computational Geometry,* edito da J. Akiyama, M. Kano, M. Urabe, Tokyo, 1998. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1763, Springer, 104-117
4. Marshall Bern, Erik Demaine, David Eppstein, Barry Hayes, “A Disk-Packing Algorithm for an Origami Magic Trick”, *Origami^3. Third International Meeting of Origami Science, Mathmatics, and Education,* Thomas Hull, Editor, A K Peters, 2002
5. Robert J. Lang, “*Origami Design Secrets. Mathematical Methods for an Ancient Art*”, A K Peters, 2003
6. http://merrimak.edu/~thull/